

Teorías Matemáticas que Fundamentan un Diseño de Investigación Científica.

Antonio Manuel Otero Dieguez

Efrén Vázquez Silva

Introducción

El estudio lógico-histórico del desarrollo de la Matemática muestra que ella define un sistema lógico-abstracto capaz de integrarse al complejo sistema de conocimientos científico-tecnológicos definido por otras ciencias (naturales, técnicas, sociales), que, al emplear las teorías y los métodos de las Matemáticas, le plantean a ella nuevos problemas que estimulan su estudio, y cuyas soluciones contribuyen al desarrollo armónico de todo el complejo sistema de conocimientos.

Desarrollo

El rol de las Matemáticas en la actividad del hombre en distintas épocas ha sido diferente, así como diferente su influencia en la búsqueda y obtención del conocimiento. Lo anterior queda definido por las necesidades presentes en las diferentes etapas de desarrollo social, condicionadas por:

El nivel de desarrollo alcanzado por las teorías y los métodos matemáticos.

El grado de madurez de los conocimientos científico-tecnológicos, que permita describir los rasgos y propiedades de los fenómenos que se estudian a través del lenguaje de la Matemática, un lenguaje "todavía más perfecto, más exacto y claro" (Amelkin, 1987).

La matemática se inter-relaciona con las ciencias mediante modelos matemáticos. Modelos que, basados en la abstracción y las teorías y métodos que los sustentan, se presentan como herramientas eficaces para el estudio e interpretación de fenómenos y procesos del mundo real. Que pueden estar influenciados por una dosis variable de subjetividad, aspecto muy bien descrito por Peralta Idrovo (Peralta-Idrovo, 2009), cuando plasma en su obra el poema Matemáticas, del costarricense Abel Pacheco.

El problema científico que se plantea en el presente trabajo es justificar, mediante un modelo matemático, un diseño de investigación científica, estructurando su sistema de categorías a través de una expresión funcional sustentada en las teorías matemáticas de axiomática, lógica y conjunto.

El objeto de estudio es entonces un diseño de investigación científica; su variable dependiente, el diseño de investigación científica específico; el campo, la modelación matemática; y la variable independiente, el modelo matemático en sí.

El objetivo es, por tanto, justificar mediante las teorías matemáticas de axiomática, lógica y conjuntos, un diseño de investigación científica, mostrando sus propiedades de consistencia, independencia y completitud.

Gracias a la exactitud de las matemáticas, expresar y justificar un diseño de investigación científica.

Contribuirá notablemente a la disminución de las posibles subjetividades en el referido diseño; y a la vez posibilitará una mejor perspectiva para la toma de decisiones a partir de los resultados de cada investigación. Y es que:

“El dominio de las matemáticas prepara la sociedad para enfrentar los avances de la ciencia y la tecnología” (Korshunov, 1980).

“La ciencia alcanza su perfección solamente cuando logra utilizar las Matemáticas” (Marx, 1995).

Metodología.

La investigación científica es un proceso de búsqueda y obtención de nuevos conocimientos científico-tecnológicos, y esta debe ser desarrollada por el investigador con carácter dialéctico - sistémico.

El diseño de la investigación científica, que es una expresión que debe ser precedida por el pronombre "Un", puesto que el mismo no es único, representa un modelo (aproximación) de

cómo debe y puede desarrollarse la búsqueda y obtención de nuevos conocimientos científico-tecnológicos.

Un diseño de investigación científica debe estar caracterizado por la flexibilidad y el dinamismo que garanticen su movimiento dialéctico y las relaciones de su sistema de categoría, evitando dogmatismos y la imposición de criterios sin una demostración objetiva, en la cual se incurre en algunas discusiones de carácter metodológico.

Un diseño de investigación científica es un medio para estructurar el desarrollo de la investigación; no es el fin (objetivo) de la misma.

"Los resultados científico-tecnológicos más importantes han sido alcanzados por hombres que no estaban interesados en los problemas metodológicos" (Menger, 1997).

La investigación científica, como obra humana, no se presenta libre de subjetividad.

Todo lo anterior, parte componente de un conjunto de muchas más razones, es lo que motiva a presentar y analizar algunos elementos que fundamentan, matemáticamente, un diseño de investigación científica.

Etapas en la investigación científica.

Desde el punto de vista filosófico, los paradigmas que sostienen la investigación científica son positivismo, post-positivismo, teoría crítica y constructivismo. "Es importante que un investigador sepa en cuál de ellos se posiciona para poder tener claridad en la concepción de la realidad de su fenómeno de estudio, la relación que debe mantener con el fenómeno de interés y la metodología que debe seguir para responder a las preguntas de investigación propuestas" (Ramos, 2015).

Variados son los postulados que describen y justifican las distintas etapas de un diseño de investigación científica que conduzca hacia la obtención de respuestas efectivas a las preguntas de investigación formuladas en un proyecto. Por ejemplo, Ary y sus colaboradores (Ary et al., 2018), proponen, para el caso de una investigación de carácter cuantitativo, la conformación de

un plan de investigación, que incluye básicamente tres elementos: el problema; las hipótesis; la metodología.

Asimismo, Maya propone en su trabajo (Maya, 2014), como etapas del diseño de una investigación, las siguientes: protocolo de investigación, delimitación y justificación del tema de estudio, formulación de objetivos, planteamiento del problema, marco teórico y conceptual de referencia y formulación de las hipótesis.

Por su parte Coria-Páez, Pastor-Román y Torres-Hernández (Coria-Páez, Pastor-Román, Torres-Hernández, 2013) plantean que existe un método que guía el trabajo de investigación en cuanto al establecimiento de pasos a seguir, que varía de una investigación a otra, aunque tales pasos a seguir pueden ser similares, pues se basan en un método central, y que este proceso de investigación cuenta con diferentes momentos que requieren de distintos métodos para su realización.

En el presente trabajo se asume que toda investigación científica puede ser representada por tres etapas que coexisten y se complementan de forma dialéctico – sistémica, a saber:

Diseño teórico de la investigación científica: El investigador, luego de un proceso de observación y análisis, presenta, formula el Problema Científico. Es decir, expresa la necesidad de cambio a un nuevo estado cualitativamente superior, mediante una ley de evolución.

El problema queda resuelto cuando se cumple el Objetivo: la obtención de un nuevo estado del Objeto estudiado; actuando sobre algunos de sus elementos que definen el Campo de Acción. El investigador presenta la Hipótesis (o conjetura), debiendo demostrar su acertada formulación y la veracidad de la misma.

Solución del problema científico formulado: La relación entre esta segunda etapa y la primera queda expresada en la siguiente idea: “la correcta formulación de un problema científico es tan importante como su solución”.

A menudo la simplicidad de la solución del problema depende de cuan acertada ha sido su formulación. Esta etapa está estrechamente relacionada con el área específica del conocimiento en que se desarrolla la investigación. En ella se seleccionan y aplican las teorías, métodos,

medios y estrategias para verificar la hipótesis establecida, que debe ser controlada y evaluada sistemáticamente.

Validación de los resultados: El investigador verifica los nuevos resultados obtenidos evaluándolos con los datos experimentales, mediante métodos estadísticos correctamente seleccionados. Muestra cómo tales resultados se integran al marco histórico-teórico que fundamenta la investigación y su relación con los resultados teóricos precedentes obtenidos por otros investigadores.

Esta etapa proporciona una valoración final de lo acertado de la hipótesis. El cumplimiento del objetivo propuesto.

Las etapas que se asumen en esta investigación toman en cuenta lo esencial de un diseño de investigación, para evitar que la “manipulación verbal” de la riqueza de conocimientos sea utilizada como forma de poder y dominación. Esta posibilidad o idea es manejada, por ejemplo, por Bravo Reinoso en su trabajo (Bravo-Reinoso, 2012).

Fundamentos matemáticos de un diseño de investigación científica.

Un diseño de investigación científica queda fundamentado teóricamente por dos áreas del conocimiento matemático: la lógica y la teoría axiomática. Estas están presentes en todas las vertientes que conforman el conocimiento matemático: en teoría de conjuntos (que es utilizada para justificar una relación funcional en el presente trabajo), álgebra, geometría, cálculo diferencial e integral, etc.; aun cuando se presenten ocultas por el alto nivel de abstracción de la construcción de las teorías y métodos aplicados.

Todo sistema de categorías (postulados) puede ser interpretado como sistema axiomático para su estudio. Sistema que debe cumplir con las propiedades de consistencia, independencia y completitud. Propiedades estas estrechamente ligadas al concepto de modelo matemático. Y a su vez, el modelo es expresado por un sistema de postulados.

Un modelo es considerado consistente si en el mismo no existen ambigüedades, contradicciones. Si el modelo es consistente, debemos garantizar su independencia; es decir, la independencia de sus postulados. Esto puede mostrarse negando alguno de los mismos. Es

interesante observar que, si el modelo es consistente, la negación de alguno de sus postulados no lo hace ambiguo.

Kurt Gödel en 1931 (Gödel, 1931) mostró que en principio, todo sistema axiomático carece de completitud; o sea, se ofrecen postulados que, en los límites de las teorías indicadas, son indemostrables e irrefutables. En consecuencia, el requisito de completitud no constituye una condición que justifique que el modelo no tenga valor práctico, y que sus resultados no sean aceptados.

En muchos casos intentar conseguir la completitud de un modelo provoca ambigüedades, y ello es frecuente en los postulados que se proponen en un diseño de investigación científica, convirtiendo a ese sistema de postulados en inconsistente.

Los modelos deben cumplir las leyes:

- Ley del tercero excluido: todo postulado es verdadero o falso.
- Ley de no contradicción: ningún postulado puede ser ambiguo (al mismo tiempo verdadero y falso).

Formalización matemática.

Formular matemáticamente un problema significa expresar el mismo en lenguaje matemático. Tal traducción se denomina formalización matemática. Un mismo problema puede ser formalizado usando distintas teorías y métodos matemáticos, y la simplicidad de su solución a menudo depende de la acertada formalización del fenómeno objeto de estudio. En este caso se aplica una óptica constructivista (un ejemplo de aplicación de este paradigma como teoría y método de enseñanza, puede ser consultado en el trabajo de Ortiz-Granja (Ortiz-Granja, 2015))

Todo problema formalizado necesita definir una cierta relación funcional entre un conjunto de partida X (conjunto de estados iniciales), un conjunto de llegada Y (conjunto de nuevos estados) y una ley de evolución F ($F: X \rightarrow Y$), que transforma elementos x del conjunto X en elementos $y=F(x)$ que se encuentran en Y . En la triada (X, F, Y) , X , Y se definen como conjuntos primitivos; en ellos los elementos de X definen las variables independientes y los elementos

de Y las variables dependientes. X, Y , subconjuntos de un conjunto que llamaremos universo (U).

Se tiene que mostrar que F es una función de evolución.

F se considera una función de evolución, si y solo si:

Luego de un número finito de operaciones (acciones), F convierte elementos de X en elementos de Y .

La acción $y=F(x)$ expresa un estado superior, consistente.

Como resultado de formular matemáticamente un problema se obtiene un modelo matemático, una idealización (aproximación) mediante la abstracción: objetos, relaciones y operaciones matemáticas. Los resultados obtenidos a partir de la solución de ese modelo deben estar en concordancia con los resultados obtenidos experimentalmente y fundamentados teóricamente, hecho que se constituye a su vez en validación del modelo.

Para un mismo problema se puede construir diferentes modelos. Un mismo modelo también puede representar fenómenos de diferentes áreas del conocimiento.

Resultados (una formalización matemática para un diseño de investigación científica).

Dado un fenómeno del mundo real, sea K un conjunto numerable que expresa todos los posibles estados por los que puede transitar el sistema objeto de estudio (representativo del fenómeno). Sea C un subconjunto no vacío de K ($C \neq \emptyset, C \subset K$), tal que, C expresa los estados iniciales del sistema.

Sea F una ley de evolución (transformación) de elementos de C en elementos de C^{\wedge} ($F: C \rightarrow C^{\wedge}$, tal que $k=F(c)$ para algún $c \in C, k \in C^{\wedge}$). C^{\wedge} es el conjunto de nuevos estados, $C^{\wedge} \subset K$ y se satisface que $C \cup C^{\wedge} \subset K$, $C \cap C^{\wedge} = \emptyset$.

Definición 1: Se llama Objeto del Problema Científico al conjunto K .

Definición 2: Se denomina Campo de Acción del Problema Científico al conjunto $C = \{k \in K, k \notin C^{\wedge}\} = \{k \in K \setminus C^{\wedge}\}$.

Los elementos del conjunto C se denominan variables independientes.

Definición 3: Se llama Objetivo del Problema Científico al conjunto $C^{\wedge} = \{F(k) \in K \setminus C, \text{ para algún } k \in C\}$.

Los elementos de C^{\wedge} se denominan variables dependientes.

Definición 4: La Hipótesis del Problema Científico es el conjunto de pares ordenados (producto cartesiano) $C \times C^{\wedge} = \{(k, F(k)) : (k \in C) \wedge (F(k) \in C^{\wedge})\}$

Definición 5: Se entiende por Problema Científico a la terna (C, F, C^{\wedge}) .

Teorema: Una condición necesaria y suficiente para que (C, F, C^{\wedge}) este correctamente formulado es $\text{Card}(C \times C^{\wedge}) \leq N_0$ (Card significa cardinal del conjunto). N_0 es el cardinal del conjunto de los números naturales.

Demostración:

Necesidad:

Por ser K un conjunto numerable, para los subconjuntos C, C^{\wedge} solamente puede ocurrir:

I.- Que C, C^{\wedge} sean conjuntos finitos. El cardinal de todo conjunto finito es igual al número de sus elementos, de donde $\text{Card}(C \times C^{\wedge}) < N_0$.

II.- Que C, C^{\wedge} sean conjuntos numerables y $\text{Card}(C \times C^{\wedge}) = N_0$.

III.- Que uno de los conjuntos sea numerable y el otro finito, y en este caso también $\text{Card}(C \times C^{\wedge}) = N_0$.

Suficiencia:

Sea

$$C \times C^{\wedge} = \{(k, F(k)) : (k \in C) \wedge (F(k) \in C^{\wedge})\}.$$

Entonces para todo k , $\text{Card}(k, F(k)) = \text{Card}(C \times C^{\wedge}) \leq N_0$, y existe $F(k) \in C^{\wedge}$ para algún $k \in C$, por tanto $C^{\wedge} \neq \emptyset$.

Se verifica que F es una función de evolución.

La Hipótesis seleccionada es válida, siendo el Objetivo propuesto cumplido.

Se concluye que (C, F, C^{\wedge}) está correctamente formulado. \square

El sistema de postulados (categorías) del diseño de investigación propuesto, es consistente.

Conclusión.

Un diseño de la investigación científica es una estrategia que ayuda a estructurar la búsqueda de nuevos resultados científicos y tecnológicos en las diferentes áreas del saber. Intentar alcanzar la completitud del sistema de categorías no garantiza que el diseño sea consistente. Puede conducir a ambigüedades.

Bibliografía

Amelkin, V. V., (1987). Ecuaciones diferenciales aplicadas a la práctica. Editorial MIR. Moscú, 272 p.

Ary, D., Cheser-Jacobs, L., Sorensen-Irvine, C.K., Walker, D.A. (2018). Introduction to Reserch in Education. Recuperado de:

https://books.google.com.ec/books?hl=es&lr=&id=4RREDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=Stages+of+scientific+research+design&ots=815FFPgAth&sig=zQ4jziZBbxjXo1z0z7ZPdeYaB_4&redir_esc=y#v=onepage&q=Stages%20of%20scientific%20research%20design&f=false

Bravo-Reinoso, P., (2012). Los muros de la sociedad de control: por una emancipación del saber desde los saberes [The walls of the control society: for an emancipation of the wisdoms from the wisdoms]. Sophia, Nro. 13. Doi: <https://doi.org/10.17163/soph.n13.2012.06>

Coria-Páez, A.L., Pastor-Román, I., Torres-Hernández, Z., (2013). Propuesta de metodología para elaborar una investigación científica en el área de Administración de Negocios [Methodological proposal for developing a scientific research in the area of Business Administration]. Revista Científica Pensamiento y Gestión, (35), 1-24. <http://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/pensamiento/issue/view/349>

Gödel, K., (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik, (38), 1, 173-198.

Korshunov, Y.M., (1980). Fundamentos matemáticos de la Cibernética. Editorial MIR. Moscú, Moscú 329 p.

Marx, C., (1995). El Capital. Tomo 1, Vol. 3, Siglo veintiuno Editores. Edición 16. Madrid.

Maya, E., (2014). Métodos y técnicas de investigación: una propuesta ágil para la presentación de trabajos científicos en las áreas de arquitectura, urbanismo y disciplinas afines. Facultad de Arquitectura, Universidad Nacional Autónoma de México.

Recuperado de

http://portal.fa-unam.mx/uploads/8/1/1/0/8110907/____metodos_y_tecnicas.pdf

Menger, C., (1997). Principios de Economía Política, 1871. Unión Editorial, Madrid.

Ortiz-Granja, D., (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. Sophia, Nro. 19. Doi: <https://doi.org/10.17163/soph.n19.2015.04>

Peralta-Idrovo, L.F., (2009). Subjetividad: lugar de la esperanza. "Lo que depende, lo que da miedo, lo que educa". Sophia, Nro. 7. Doi: <https://doi.org/10.17163/soph.n7.2009.02>

Ramos, C.A. (2015). Los paradigmas de la investigación científica [Scientific research paradigms]. Avances en psicología: Revista de la Facultad de Psicología y Humanidades, (23) 1, 9-17. <http://revistas.unife.edu.pe/index.php/avancesenpsicologia/article/view/167>