PRIMERA EDICIÓN

Geometría y Trigonometría:

una visión integral del espacio, la medida y la enseñanza del cambio

AUTORÍA

GUERRERO ZAMBRANO MARCOS FRANCISCO

EDICIONES RISEI

COLECCIÓN:
Eduación en acción. Praxis, currículo y subjetividades

Geometría y Trigonometría: una visión integral del espacio, la medida y la enseñanza del cambio

Autores

Guerrero Zambrano Marcos Francisco
Universidad Estatal de Milagro
mguerreroz@unemi.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-5617-6836

Editorial: *Ediciones RISEI*
Colección Educación en acción: Praxis, currículo y subjetividades
Título del libro: Geometría y Trigonometría: una visión integral del espacio, la medida y la enseñanza del cambio
Autoría: Guerrero Zambrano Marcos Francisco
Edición: Primera edición
Año: 2025
ISBN digital: 978-9942-596-46-8
DOI: https://doi.org/10.63624/risei.book-978-9942-596-46-8

Coordinación editorial: Jorge Maza-Córdova y Tomás Fontaines-Ruiz
Corrección de estilo: Unidad de Redacción y Estilo
Diagramación y diseño: Unidad de Diseño
Revisión por pares: Sistema doble ciego de revisión externa

Machala – Ecuador, diciembre de 2025

Este libro fue diagramado en InDesign.
Disponible en: https://editorial.risei.org/
Contacto: info@risei.org

Prólogo

Hay libros que llegan para enseñar, y otros que llegan para acompañar. Este pertenece a ambos. Acompaña al lector en un viaje que comienza mucho antes de abrir sus páginas, en ese momento íntimo en el que alguien se pregunta qué es realmente la geometría, por qué la trigonometría aparece en tantos caminos del conocimiento, o cómo es posible que ideas tan antiguas sigan siendo esenciales en la vida contemporánea.

Desde civilizaciones que midieron la tierra para sobrevivir hasta las teorías que hoy describen el espacio curvo del universo, la geometría y la trigonometría han sido formas de ordenar el mundo y de pensar con claridad. No son solo disciplinas matemáticas; son maneras de mirar. Este libro recupera esa mirada con una voz que une historia, rigor y didáctica, sin perder la sensibilidad que hace de la matemática una creación humana antes que un conjunto de reglas.

A lo largo de estas páginas, el lector descubrirá que un punto no es solo una marca, que una recta no es solo un trazo, y que un ángulo no es únicamente una medida. Cada concepto se revela como una estructura de pensamiento con raíces profundas, capaz de dialogar con la experiencia cotidiana y con las abstracciones más elevadas. El libro no exige memorizar; invita a comprender. No pide repetir procedimientos; propone reconstruirlos desde la intuición y el razonamiento.

Quien enseñe encontrará aquí un recurso que respeta la complejidad del aprendizaje geométrico y que ofrece explicaciones claras, conectadas con las necesidades reales del aula. Quien estudie reconocerá un texto que no se limita a mostrar resultados, sino que acompaña el proceso de pensar: observar, conjeturar, justificar, refutar y volver a empezar. Quien simplemente tenga curiosidad hallará una lectura que combina historia, ideas y ejemplos con una narrativa que busca acercar la matemática a la vida.

Este libro es, en esencia, un puente: entre la geometría clásica y la contemporánea, entre la formalidad del razonamiento y la intuición sensible, entre la enseñanza tradicional y las posibilidades que hoy ofrecen las herramientas digitales. Detenerse en sus páginas es reencontrarse con una matemática que sigue viva, que sigue interrogándonos y que sigue enseñándonos a ver.

Con ese espíritu nace este prólogo: como una invitación abierta a recorrer, sin prisa y con asombro, un territorio que ha acompañado a la humanidad desde sus primeros trazos hasta sus más recientes descubrimientos. Que cada lector haga de este viaje una experiencia propia, porque la geometría, al final, no se aprende únicamente con los ojos: se aprende con la mente despierta y con la curiosidad en movimiento.

Contenido

Capítulo I 18

Introducción a la geometría, la trigonometría y conceptos fundamentales

Introducción
La geometría como ciencia del espacio: origen y evolución histórica
Sistemas axiomáticos: Euclides, Hilbert y las geometrías no euclidianas
Conceptos fundamentales: punto, recta, plano y posición relativa
Razonamiento deductivo e inductivo en la construcción geométrica.
Conclusiones
Referencias

Capítulo II 52

Polígonos, áreas, circunferencia y círculo

Introducción
Clasificación de polígonos: regulares e irregulares
Propiedades de triángulos y cuadriláteros
Cálculo de perímetros y áreas de figuras planas
La circunferencia y el círculo
Conclusiones
Referencias

Capítulo III 87

Relaciones métricas en triángulos, poliedros, cuerpos de revolución y modelo de Van Hiele

Introducción
Relaciones métricas en triángulos rectángulos y oblicuángulos
Semejanza de triángulos y razón de proporcionalidad
Poliedros y cuerpos de revolución: clasificación y propiedades
Volúmenes y áreas de cuerpos geométricos
Modelo de Van Hiele: niveles de razonamiento geométrico
Conclusiones
Referencias

Capítulo IV 118

Razones e identidades trigonométricas y resolución de triángulos

Introducción
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo
Relaciones fundamentales y círculo trigonométrico
Identidades trigonométricas básicas
Algunas aplicaciones de la trigonometría en la vida cotidiana y las ciencias
Conclusiones
Referencias

índice de tabla y figuras

Capítulo I

Índice de figuras

Figura 1. Representación gráfica de los postulados euclidianos sobre rectas, círculos y ángulos rectos
Figura 2. Representación del quinto postulado de Euclides y la condición de paralelismo
Figura 3. Representación geométrica de un plano y la relación de incidencia entre puntos, rectas y superficies
Figura 4. Representación del axioma de orden y la relación "entre" en una línea recta
Figura 5. Representación del principio de congruencia mediante la traslación de un triángulo en el plano
Figura 6. Representación axiomática del paralelismo en el sistema de Hilbert
Figura 7. Representación de la continuidad geométrica mediante puntos intermedios entre A y B
Figura 8. Visualización del postulado hiperbólico en el disco de Poincaré: generación de infinitas paralelas desde un punto exterior
Figura 9. Representación de puntos como elementos primitivos en la geometría hilbertiana
Figura 10. Visualización del acto perceptivo en la geometría: el punto como mirada encarnada
Figura 11. La recta como continuidad ideal en la geometría clásica y moderna
Figura 12. La recta como soporte de la medida y referencia numérica en el sistema cartesiano
Figura 13. La recta como trayectoria mínima y soporte de significado en la acción matemática
Figura 14. El plano como extensión bidimensional para la representación de puntos, rectas y figuras geométricas

Figura 15. Transformaciones rígidas y conservación de propiedades invariantes en un triángulo euclidiano
Figura 16. Conservación de la paralelidad en una transformación afín de un cuadrilátero
Figura 17. Proyección central de una figura: vista 2D y vista 3D del proceso de transformación proyectiva
Figura 18. Intersección, paralelismo y perpendicularidad como relaciones fundamentales entre rectas en geometría euclidiana
Figura 19. Construcción de arcos geodésicos y puntos notables en el modelo del disco de Poincaré
Figura 20. Visualización dinámica del paralelismo mediante el control de pendiente y posición en GeoGebra
Figura 21. Exploración dinámica de un triángulo isósceles y conservación de los ángulos en la base
Figura 22. Exploración dinámica de un triángulo isósceles y conservación de los ángulos en la base
Figura 23. Triángulos inscritos con diámetro común: visualización interactiva del teorema de Thales

Capítulo II

Índice de tablas

Tabla 1. Fórmulas fundamentales de perímetro y área en figuras planas
Tabla 2. Ejercicios introductorios de perímetro y área en figuras planas
Tabla 3. Ejercicios de composición y descomposición de áreas para el desarrollo del razonamiento geométrico
Tabla 4. Ejercicios de homotecia, perímetro y variación de áreas en figuras planas
Tabla 5. Problemas avanzados de generalización y representación funcional en geometría plana
Tabla 6. Problemas aplicados de geometría en contextos reales y de estimación cuantitativa
Tabla 7. Tareas demostrativas para el desarrollo del razonamiento geométrico avanzado

Índice de figuras

Figura 1. Polígonos como estructuras espaciales: relaciones entre puntos, segmentos y ángulos
Figura 2. Comparación de polígonos regulares según forma, número de lados y disposición espacial
Figura 3. Propiedades angulares de un polígono regular: igualdad de lados, ángulos interiores y ángulos exteriores

Figura 4. Hexágono regular: bisectrices interiores y relación con la circunferencia inscrita y circunscrita
Figura 5. Pentágono regular: bisectrices interiores y centro de la circunferencia inscrita
Figura 6. Modelación geométrica de un polígono inscrito y circunscrito como aproximaciones a la realidad física
Figura 7. Exploración de relaciones angulares y estructurales mediante la construcción dinámica de polígonos
Figura 8. Contraste entre figura irregular y figura regular: reconocimiento de relaciones internas en geometría
Figura 9. Variación de ángulos y perímetros al modificar un vértice de un triángulo construido en GeoGebra
Figura 10. Relación jerárquica entre cuadrado y rectángulo mediante comparación de propiedades geométricas
Figura 11. Comparación de cuadriláteros para analizar límites conceptuales entre clases de figuras
Figura 12. Representación tridimensional de un triángulo para analizar su estructura geométrica básica
Figura 13. Triángulo con medición de ángulos para promover el razonamiento deductivo
Figura 14. Construcciones articuladas para explorar la rigidez estructural en geometría
Figura 15. Triángulos congruentes mediante el criterio Lado–Ángulo–Lado (LaL)
Figura 16. Triángulo rectángulo y aplicación del teorema de Pitágoras
Figura 17. Paralelogramos: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide
Figura 18. Transformación de un trapecio en un paralelogramo mediante el ajuste de vértices
Figura 19. Ejemplo de cuadrilátero no paralelogramo con análisis de sus lados
Figura 20. Perímetro de un hexágono regular y representación de la suma de sus lados
Figura 21. Aproximación poligonal al perímetro curvilíneo en figuras circulares
Figura 22. Descomposición y transformación de un polígono para justificar el cálculo de área
Figura 23. Representación de la circunferencia como lugar geométrico de puntos equidistantes del centro
Figura 24. Diferencia conceptual entre circunferencia y círculo como límite y superficie
Figura 25. Relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro en la definición geométrica de π
Figura 26. Representación simbólica del área del círculo

Figura 27. Aproximación de la longitud de un arco mediante el uso de cuerdas
Figura 28. Relaciones entre arco, cuerda y ángulo central como base para la abstracción progresiva
Figura 29. Descomposición del círculo en sector y segmento circular para introducir la idea de integración
Figura 30. Representación del segmento circular como combinación del sector y el triángulo isósceles

Capítulo III

Índice de tablas

Tabla 1. Cálculos de longitudes y áreas en hexágonos semejantes con factor de escala k=1.5k.
Tabla 2.Cálculos del radio, áreas y costos en una plaza circular ampliada con factor de escala k=1.2.
Tabla 3. Fórmulas fundamentales de áreas y volúmenes en cuerpos geométricos
Tabla 4. Cálculo del volumen y áreas asociadas a un tanque cilíndrico
Tabla 5.Cálculo comparativo de altura, generatriz y área lateral en dos envases cónicos con igual volumen
Tabla 6. Cálculo del volumen interno y del área superficial externa de un domo hemisférico

Índice de figuras

Figura 1. Descomposición métrica del triángulo rectángulo mediante la altura.
Figura 2. Representación geométrica de la escalera como hipotenusa del triángulo rectángulo.
Figura 3. Representación geométrica de la Ley del Seno en un triángulo inscrito en una circunferencia.
Figura 4. Aplicación de la Ley del Coseno para determinar la distancia entre dos puntos remotos.
Figura 5. Representación geométrica de la Ley del Coseno en un triángulo oblicuángulo.
Figura 6. Variación del lado opuesto en función de la apertura del ángulo según la Ley del Coseno.
Figura 7. Triángulos homotéticos que conservan la estructura proporcional bajo un mismo factor de escala.
Figura 8. Relación de proporcionalidad entre lados homólogos como fundamento de la semejanza de triángulos.
Figura 9. Proporcionalidad de alturas y elementos métricos derivados en triángulos semejantes.

Figura 10. Relación cuadrática de las áreas en triángulos semejantes con factor de escala k.
Figura 11. Ampliación de una región plana y crecimiento cuadrático de su área.
Figura 12. Ampliación homotética de una plaza hexagonal con factor de escala k=1.5.
Figura 13. Plaza circular y su versión homotética con factor de escala k=1.2.
Figura 14. Representación tridimensional de un prisma con bases congruentes y caras laterales paralelográmicas.
Figura 15. Representación tridimensional de una pirámide con base poligonal y un vértice común o ápice.
Figura 16. Modelo tridimensional de un poliedro regular construido a partir de caras congruentes.
Figura 17. Representación tridimensional de un cubo como ejemplo de sólido platónico.
Figura 18. Representación tridimensional del cilindro y su superficie lateral para el cálculo del área.
Figura 19. Comparación visual entre el cilindro y el cono para analizar la razón volumétrica 1:3.
Figura 20. Relación entre la esfera y el cilindro circunscrito para visualizar área y volumen.
Figura 21. Representación del tanque cilíndrico para el cálculo de volumen y área de construcción.
Figura 22. Comparación geométrica de dos envases cónicos con igual volumen y radios distintos para analizar el área lateral requerida.
Figura 23. Representación geométrica de un domo hemisférico de radio 5 metros para el análisis de volumen y superficie.

Capítulo IV

Índice de tablas

Tabla 1. Identidades trigonométricas fundamentales y su interpretación geométrica.
Tabla 2. Propuesta de ejercicios para enseñar identidades trigonométricas desde la comprensión

Índice de figuras

Figura 1. Representación comparativa de las funciones seno y coseno en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.
Figura 2. Invariancia del seno de un ángulo en triángulos rectángulos semejantes.

Figura 3. Semejanza de triángulos y conservación de las razones trigonométricas.
Figura 4. Ejemplos de triángulos en posiciones no convencionales para fortalecer la identificación conceptual de las razones trigonométricas.
Figura 5. Representación trigonométrica de un poste y su sombra para analizar la razón tangente.
Figura 6. Variación dinámica de un triángulo rectángulo para observar la constancia de las razones trigonométricas.
Figura 7. Representación gráfica de la función seno para evidenciar su comportamiento continuo y periódico.
Figura 8. Relación dinámica entre el movimiento circular y la función seno para visualizar la periodicidad y continuidad trigonométrica.
Figura 9. Comparación gráfica de f(x)=sen(x) y g(x)=sen(x+2ϖ) para ilustrar la periodicidad del seno.
Figura 10. Representación gráfica de las simetrías del seno y del coseno para ilustrar su carácter impar y par, respectivamente.
Figura 11. Representación del punto $P(cos\theta, sen\theta)$ en la circunferencia unitaria para visualizar el significado geométrico de las razones trigonométricas.
Figura 12. Representación geométrica de la tangente en la circunferencia unitaria como pendiente de la recta que une el origen con $P(cos\theta, sen\theta)$ y como intersección con la línea tangente en (1,0).
Figura 13. Representación del movimiento angular continuo en el círculo unitario y su relación con la extensión de ángulos, coordenadas y periodicidad.
Figura 14. Representación geométrica de la identidad fundamental $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)$ en la circunferencia unitaria.
Figura 15. Representación geométrica del problema de medición de la altura del asta utilizando ángulos de elevación de $45^\circ y 30^\circ$.
Figura 16. Representación gráfica de la función m(t) para analizar el flujo periódico de estudiantes en el stand matemático.
Figura 17. Visualización de la interferencia entre dos ondas sonoras de frecuencias cercanas y su resultante modulada.
Figura 18. Representación temporal del voltaje aplicado en el circuito RL para analizar la impedancia y el desfase.
Figura 19. Modelación senoidal del ritmo cardíaco a partir de la frecuencia de 75 latidos por minuto.
Figura 20. Función cosenoidal que modela la variación diaria de la temperatura en una ciudad costera.

Capítulo I

Introducción a la geometría, la trigonometría y conceptos fundamentales

Introducción

Hablar de geometría y trigonometría es hablar de la historia del pensamiento humano. Desde las civilizaciones antiguas que midieron la tierra, trazaron templos o calcularon la posición de los astros, el ser humano ha buscado entender el espacio que habita y las relaciones que lo sostienen. La geometría nació del asombro ante las formas, de la necesidad de medir y ordenar; la trigonometría, del deseo de comprender los movimientos del cielo y transformar la observación en cálculo. Ambas conforman un lenguaje de comprensión del mundo: la geometría describe la estabilidad de las formas y la trigonometría traduce el movimiento en medida. En su conjunto, constituyen una manera de pensar que une la experiencia y la razón, la intuición y la demostración, la mirada sensible y la abstracción lógica.

A lo largo de los siglos, la geometría y la trigonometría han evolucionado desde lo empírico hacia lo conceptual, conservando, sin embargo, un rasgo común: su capacidad para enseñar a razonar. Desde los postulados de Euclides hasta las formulaciones axiomáticas de Hilbert, y desde las concepciones de espacio de Piaget hasta las representaciones digitales actuales, ambas disciplinas han sido un espejo de la mente humana en su búsqueda de coherencia. Comprender un punto, una recta, un plano o una razón trigonométrica es mucho más que memorizar definiciones: implica descubrir cómo la mente organiza el espacio, cómo lo interpreta y cómo lo transforma. En ese proceso, el estudiante no solo aprende a calcular, sino a pensar estructuradamente, a deducir, justificar y comunicar ideas con precisión.

En la actualidad, la enseñanza de la geometría y la trigonometría demanda integrar la tradición del razonamiento con las oportunidades que ofrecen los entornos digitales. Las herramientas interactivas como GeoGebra, Desmos permiten que el estudiante experimente con figuras, observe patrones y visualice relaciones que antes solo podían imaginarse. Esta interacción inmediata entre la idea y su representación contribuye a que la comprensión deje de ser estática para volverse dinámica. La figura se mueve, los ángulos cambian, los valores se ajustan, pero las relaciones se mantienen: el estudiante comprende entonces que la verdad geométrica no depende del dibujo, sino del razonamiento que lo explica.

El propósito de este capítulo es invitar a redescubrir la geometría y la trigonometría como formas vivas de pensamiento, no solo como contenidos matemáticos. A través de un recorrido histórico, conceptual y didáctico, se busca comprender cómo ambas disciplinas han evolucionado desde la observación empírica hasta la abstracción formal, sin perder su raíz humana: la necesidad de comprender el espacio y el cambio. El capítulo propone mirar la enseñanza de estas áreas como una experiencia intelectual y creativa, donde el estudiante observa, construye, argumenta y representa, integrando la intuición con la lógica y la exploración con la demostración. En un mundo en permanente transformación, comprender la estructura y el movimiento del espacio se convierte en una oportunidad para aprender a pensar con claridad, profundidad y sentido.

La geometría como ciencia del espacio: origen y evolución histórica

La historia de la geometría es la historia de cómo las culturas han aprendido a ver el espacio con rigor. Empieza con la necesidad de medir y termina con lenguajes abstractos que describen la curvatura del universo o la estructura de los datos digitales. Ese arco evolutivo no discurre en línea recta. Alterna momentos de invención práctica, formalización lógica, cambio de puntos de vista y síntesis unificadoras. Seguir ese hilo ayuda a comprender por qué enseñar geometría no es repetir fórmulas, sino entrenar la mirada para detectar invariantes, justificar relaciones y modelar situaciones.

Las primeras manifestaciones del pensamiento geométrico surgen mucho antes de la existencia de una teoría formal. Nacen del trabajo y de la necesidad, de la relación del ser humano con el espacio que habita y transforma. En las civilizaciones mesopotámica y egipcia, la geometría aparece como un saber práctico y empírico, orientado a resolver problemas concretos de agrimensura, construcción y cálculo de áreas o volúmenes.

En Mesopotamia, las tablillas de arcilla como la Plimpton 322 (siglo XVIII a. C.) muestran el desarrollo de relaciones numéricas que anticipan la teoría pitagórica. Estas tablas, escritas en cuneiforme, registran ternas que corresponden a triángulos rectángulos y evidencian un pensamiento matemático operativo, basado en la observación y la proporción (Boyer & Merzbach, 2019; Katz, 2009). Aunque no existía un lenguaje deductivo, se percibe ya una lógica subyacente en el uso de reglas empíricas, capaces de resolver problemas de campo, reparto o construcción.

En Egipto, el conocimiento geométrico también tuvo un carácter funcional. Los harpedonaptas, o "tensadores de cuerdas", utilizaban cuerdas con nudos espaciados 3-4-5 para trazar ángulos rectos y replantear terrenos después de las crecidas del Nilo. Los papiros de Rhind y Moscú (aprox. 1800 a. C.) recopilan procedimientos para calcular áreas de polígonos, volúmenes de pirámides truncadas o cilindros, y estimaciones del número ϖ con un grado de precisión sorprendente. Sin embargo, se trataba de un conocimiento intuitivo y algorítmico, carente aún de los principios de demostración o generalización propios de la matemática griega posterior (Boyer & Merzbach, 2019; Stillwell, 2010).

En este contexto, la geometría fue una tecnología del orden, una herramienta para domesticar el espacio. Su propósito no era la verdad universal, sino la eficacia. Pero ese mismo saber empírico sentó las bases del pensamiento geométrico: la necesidad de medir, comparar, representar y conservar la proporción. La semilla de la abstracción se encontraba ya en la acción del agrimensor que, sin saberlo, reproducía los principios de la razón espacial.

El giro decisivo en la historia de la geometría fue metodológico. Los griegos transformaron un conjunto disperso de procedimientos en un sistema de conocimiento racional, articulado mediante definiciones, axiomas y teoremas. Este paso de la receta empírica a la demostración lógica marca el nacimiento del pensamiento matemático en sentido estricto.

Euclides, en su monumental obra Los Elementos (siglo III a. C.), consolidó esta revolución intelectual. Su método se basaba en partir de unas pocas nociones primitivas: punto, línea, plano, establecer postulados simples y deducir de ellos una red coherente de proposiciones. Cada afirmación debía ser probada mediante razonamiento, no mediante observación. La geometría dejó así de ser un saber empírico y se convirtió en una ciencia del pensamiento puro (Euclides, 2002; Boyer & Merzbach, 2019).

El espíritu demostrativo alcanzó su culminación en figuras como Arquímedes, quien aplicó procedimientos que hoy reconocemos como precursores del cálculo integral. Mediante el método de exhausción, Arquímedes determinaba áreas y volúmenes por aproximaciones sucesivas, anticipando el concepto de límite. Por su parte, Apolonio de Perga llevó la abstracción aún más lejos, al estudiar las secciones cónicas desde una perspectiva analítica y rigurosa (Stillwell, 2010; Katz, 2009). Con ellos, la geometría dejó de describir el espacio sensible y comenzó a crear un universo intelectual autónomo.

El modelo griego de conocimiento estableció una relación nueva entre razón y realidad: el saber geométrico ya no dependía de la experiencia, sino de la deducción. Esta independencia dio lugar a una matemática de estructura, donde la coherencia interna se volvió más importante que la utilidad práctica. Sin embargo, esta abstracción, que es la raíz de la ciencia moderna, también generó una distancia entre el conocimiento y la vida cotidiana. Como señala Netz (2004), la geometría griega nació en un contexto social de élites, donde la demostración era un acto intelectual y no una necesidad del trabajo manual.

Apoyo didáctico: desde una mirada contemporánea, este legado plantea un desafío didáctico: ¿cómo recuperar en la escuela el equilibrio entre la exactitud racional y la inteligencia práctica? Enseñar geometría hoy implica rescatar la claridad del método griego, pero también devolverle su conexión con la experiencia. El estudiante debe comprender que cada axioma tiene un origen humano, que la demostración no es un ritual vacío, sino una manera de justificar por qué el mundo puede ser pensado de forma coherente.

Con Grecia, la geometría se convierte en lenguaje universal del pensamiento. La noción de demostración inaugura un ideal de certeza que marcará toda la historia de la ciencia. Pero, al mismo tiempo, recuerda que la claridad conceptual nace del asombro, de la necesidad de explicar lo que se ve. Como escribió Arquímedes, "Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo": una metáfora precisa de la geometría misma, que sigue siendo ese punto firme desde el cual el pensamiento humano mueve los límites de su comprensión.

La transmisión y reelaboración de la herencia griega despliega nuevas preguntas y técnicas. En India, los Śulba Sūtras y más tarde Aryabhata y Bhāskara II trabajan con configuraciones geométricas vinculadas a la astronomía y al calendario. En China, Los nueve capítulos sobre el arte matemático con el comentario de Liu Hui exploran algoritmos para áreas y volúmenes, así como descomposiciones ingeniosas que expresan intuiciones geométricas en términos operativos.

La perspectiva artística descubre la proyección central como estructura matemática. Desargues y Poncelet fundan la geometría proyectiva, que no conserva longitudes ni ángulos, pero sí alineaciones e incidencias. Este cambio de foco muestra que la geometría puede organizarse alrededor de lo que permanece invariante bajo ciertas transformaciones. A la vez, Monge y la escuela francesa sistematizan la geometría descriptiva como lenguaje de la ingeniería y la arquitectura, consolidando el vínculo entre dibujo técnico y razonamiento espacial (Gray, 2018).

Con La Géométrie de Descartes se establece una traducción entre figuras y ecuaciones. El plano cartesiano permite resolver problemas geométricos con herramientas algebraicas y, recíprocamente, visualizar soluciones de ecuaciones como curvas. Junto al cálculo de Newton y Leibniz y la posterior formalización de Cauchy y Weierstrass, nace un diálogo incesante entre análisis y geometría que alimenta la física matemática y la modelación de fenómenos continuos (Stillwell, 2010).

La crisis de las paralelas y la pluralidad de espacios: Durante siglos se intentó deducir el quinto postulado de Euclides a partir de los otros. El fracaso de ese proyecto resultó fecundo. Lobachevski y Bolyai muestran que al negar el postulado emergen geometrías coherentes, especialmente la hiperbólica. Beltrami y luego Klein proporcionan modelos que aseguran su consistencia relativa. De pronto la pregunta ya no es si el espacio euclidiano es verdadero, sino qué hipótesis adoptamos y qué invariantes estudiamos en cada familia de transformaciones. La elíptica completa el tridente no euclidiano, y la intuición común debe reeducarse para aceptar sumas de ángulos distintas de 180 grados o rectas que se comportan de forma contraintuitiva (Gray, 2018).

En este sentido, Klein propone en 1872 una visión unificadora que sigue vigente: una geometría se define por su grupo de transformaciones y por las propiedades que permanecen invariantes bajo ese grupo. Euclídea se centra en isometrías, proyectiva en proyecciones centrales, afín en transformaciones afines. Este marco organiza el mapa de las geometrías y educa la mirada para buscar invariantes más que listas de propiedades aisladas.

La idea transforma la enseñanza misma, porque invita a resolver problemas analizando qué cambia y qué no cuando se actúa sobre las figuras (Klein, 2004; Gray, 2018).

Por su parte, Gauss introduce la curvatura intrínseca y Riemann generaliza la noción a variedades de dimensión arbitraria. Se puede medir curvatura desde dentro, sin referencia al espacio ambiente. Ese lenguaje se convierte en la gramática natural de la relatividad general y de la teoría de campos, y abre caminos a objetos como geodésicas, tensores y formas diferenciales que hoy pueblan tanto la matemática pura como la física teórica (Stillwell, 2010).

El cambio de horizonte que inaugura el siglo XX no es solo técnico: es filosófico. Hilbert propone una reconstrucción de la geometría euclidiana basada en sistemas axiomáticos explícitos, donde los términos primitivos ("punto", "recta", "plano") carecen de contenido previo y obtienen significado únicamente por las relaciones que los axiomas establecen. Esta "limpieza" conceptual permite discutir con precisión independencia, consistencia y completitud relativas, y convierte a la geometría en un laboratorio del pensamiento lógico (Hilbert, 1971). La mirada deja de centrarse en las figuras para enfocarse en la estructura: lo importante no es cómo luce un triángulo, sino qué condiciones formales lo constituyen.

El proyecto hilbertiano se nutre de los avances en lógica matemática y da pie a programas paralelos. El sistema sintético de Tarski reformula la geometría elemental con un vocabulario mínimo (congruencia y betweenness) dentro de la teoría de modelos, abriendo la puerta a demostrar resultados de decidibilidad y completitud para fragmentos significativos de la geometría euclidiana (Tarski & Givant, 1999). A la par, el impacto de los teoremas de Gödel obliga a matizar las expectativas fundacionales: no todo sistema suficientemente expresivo puede probar su propia consistencia. Lejos de clausurar el programa, esta constatación refuerza el valor formativo de la axiomatización: razonar geométricamente es razonar sobre supuestos y consecuencias (Stillwell, 2010).

Este desplazamiento, del objeto al sistema, tiene un eco pedagógico claro. En el aula, trabajar con definiciones operativas, contraejemplos y dependencias axiomáticas ayuda a que el estudiantado entienda que las propiedades no "caen del cielo": se postulan y se derivan. Diseñar secuencias donde se compare, por ejemplo, la geometría euclidiana con una versión "euclidiana sin paralela" (reemplazando el quinto postulado) muestra que cambiar un axioma cambia el mundo.

Finalmente, la axiomatización del siglo XX revela que la geometría es tanto episteme como método: una forma de producir verdad dentro de sistemas explícitos. Ese énfasis en la forma, lejos de empobrecer la disciplina, la libera para dialogar con lógicas no clásicas, teoría de modelos y fundamentos computacionales, ampliando su alcance a dominios donde lo geométrico es, ante todo, estructura.

Desde este cimiento, la geometría se despliega en direcciones múltiples y a menudo inesperadas. La topología estudia propiedades invariantes por deformaciones continuas y formaliza herramientas como la homología y la cohomología para distinguir espacios "por dentro". Problemas clásicos (clasificación de superficies, nudos, variedades) se abordan ahora con un arsenal algebraico y analítico de gran profundidad (Stillwell, 2010).

La geometría diferencial moderna bebe de Riemann y crece con Cartan: variedades suaves, conexiones y curvatura permiten estudiar cómo se "dobla" el espacio. Este lenguaje se vuelve el alfabeto de la física teórica (relatividad general) y de la mecánica de medios continuos. Resultados como el teorema del índice de Atiyah-Singer enlazan análisis, topología y geometría, mostrando que cruzar fronteras conceptuales es el modo natural de avanzar (Stillwell, 2010). En paralelo, los grupos de Lie y sus representaciones proveen la sintaxis de las simetrías: cada ley de invariancia admite una lectura geométrica.

La geometría algebraica renace con la topología de Zariski y alcanza una nueva madurez con el programa de Grothendieck. Al introducir esquemas y funtores, la disciplina reinterpreta curvas y superficies definidas por ecuaciones polinómicas como objetos que viven simultáneamente en lo aritmético y lo geométrico.

En otra frontera, la geometría discreta y computacional se convierte en gramática del mundo digital. Diagramas de Voronoi, triangulaciones de Delaunay y estructuras de proximidad modelan teselaciones, empaquetamientos y problemas de visibilidad; algoritmos para polígonos, poliedros y nubes de puntos sostienen gráficos por computador, visión artificial, robótica, GIS y bioinformática (Aurenhammer, 1991; de Berg et al., 2008). Las nociones clásicas: convexidad, distancia, proyección, adquieren una dimensión algorítmica: ya no basta con existir, hay que computar eficientemente.

La expansión contemporánea también cruza con análisis armónico y procesamiento de señales: del círculo unitario a las series de Fourier y a bases onduladas capaces de capturar patrones en datos complejos. En aprendizaje automático, métodos de manifold learning suponen que los datos viven cerca de variedades de baja dimensión; medir geodésicas y curvaturas vuelve a ser crucial, ahora en espacios de alta dimensión. La geometría, lejos de un museo de figuras, se confirma como ciencia de estructuras que organiza lo continuo, lo discreto y lo computacional bajo un mismo horizonte conceptual.

Al integrar estos hilos, la tesis central se hace visible: la geometría ya no es solo medición ni solo demostración; es el estudio de estructuras, modelos y representaciones que dialogan con la lógica, el álgebra, el análisis y la computación. Ese diálogo, sostenido en el tiempo, explica por qué la geometría sigue siendo un lenguaje privilegiado para pensar el espacio... y para pensar con el espacio.

Mirar la geometría con perspectiva histórica permite articular tres ideas didácticas. Primero, que los conceptos nacen de problemas significativos y cambian cuando cambian las herramientas. Segundo, que el corazón de la disciplina es la justificación, no el dibujo bonito. Tercero, que aprender geometría es aprender a ver con estructura, lo que en educación se concreta en progresiones de razonamiento espacial y niveles de comprensión de lo visual y lo formal. La investigación didáctica lo sustenta con marcos como el enfoque onto-semiótico y los niveles de razonamiento geométrico propuestos por Van Hiele, útiles para planificar secuencias que avancen desde la percepción a la deducción con tareas ricas y representaciones coordinadas (Godino, Batanero y Font, 2007; van Hiele, 1986).

Sistemas axiomáticos: Euclides, Hilbert y las geometrías no euclidianas

Un sistema axiomático es un pacto explícito: acordamos términos primitivos que no se definen, postulados que aceptamos sin prueba y reglas de inferencia para deducir teoremas. Su potencia no está en “decir verdades” sino en hacer visibles los supuestos que usamos al razonar. La historia de la geometría puede leerse como el paso desde un edificio elegante, pero con premisas implícitas, a uno con cimientos declarados y ensayados en modelos diversos. Ese viaje va de Los Elementos de Euclides a la axiomatización fina de Hilbert y a la pluralidad de espacios coherentes que inauguran Lobachevski, Bolyai y Riemann (Euclides, 2002; Hilbert, 1971; Greenberg, 2011; Gray, 2018).

Euclides: el orden de las razones

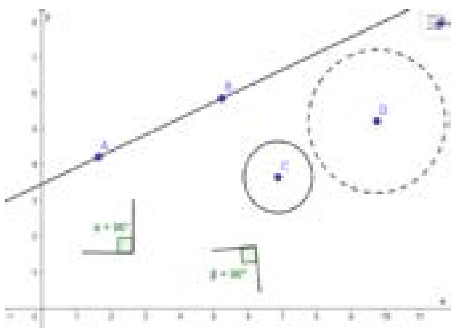
La grandeza de Los Elementos de Euclides no reside únicamente en los resultados que contiene, sino en la forma de pensar que inaugura. A partir de un pequeño conjunto de principios básicos, el autor de Alejandría construye un sistema que, durante más de dos milenios, fue considerado el modelo de la razón demostrativa. La novedad euclidiana no es el descubrimiento de nuevos teoremas, sino la organización de los conocimientos geométricos existentes bajo una lógica rigurosa y coherente, donde cada proposición se justifica a partir de definiciones, postulados y nociones comunes.

Los cinco postulados que Euclides propone en el Libro I constituyen el armazón del pensamiento geométrico clásico. En formulación moderna, pueden expresarse de la siguiente manera:

1. Entre dos puntos cualesquiera puede trazarse una recta.
2. Toda recta puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.
3. Con cualquier centro y radio se puede describir un círculo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta al cortar a otras dos formas ángulos interiores del mismo lado cuya suma es menor que dos rectos, esas dos rectas, prolongadas indefinidamente, se encontrarán en el lado en que la suma de los ángulos sea menor que dos rectos.

Los cuatro primeros postulados como muestra la figura 1(a), definen un espacio gobernado por la intuición de lo recto, lo continuo y lo equidistante. El quinto, en cambio (figura 1 (b)), introduce una relación más profunda entre las líneas y el infinito: el principio de paralelismo. En su forma clásica, este postulado establece la unicidad de la paralela que pasa por un punto exterior a una recta dada. Durante siglos, este enunciado inquietó a los matemáticos, pues parecía más complicado que los otros y su veracidad no era tan evidente.

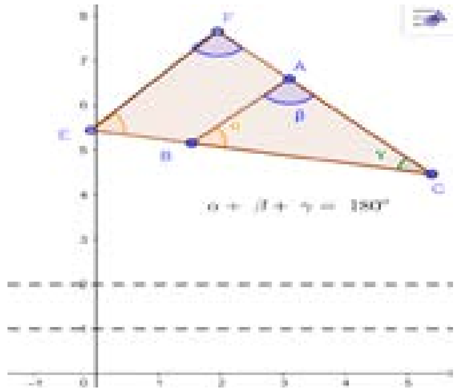
Figura 1.
Representación gráfica de los postulados euclidianos sobre rectas, círculos y ángulos rectos



Nota: Elaboración propia.

Euclides (2002) lo acepta sin discusión, pero deja entrever una tensión que recorrerá toda la historia de la geometría. En su sistema, la suma de los ángulos de un triángulo equivale a 180°, los polígonos semejantes conservan sus proporciones y las rectas paralelas nunca se encuentran.

Figura 2.
Representación del quinto postulado de Euclides y la condición de paralelismo



Nota: Elaboración propia.

No obstante, esa dependencia invisible del quinto postulado hizo sospechar que su eliminación o modificación podía alterar la estructura entera del espacio.

Autores posteriores, como Saccheri en el siglo XVIII y Lobachevsky y Bolyai en el XIX, exploraron precisamente esa posibilidad. Al sustituir el postulado por versiones alternativas: una recta que admite más de una paralela, o ninguna, descubrieron universos geométricos igualmente coherentes, aunque distintos del euclidiano (Bonola, 1955; Katz, 2009). De esa revolución intelectual nació la geometría no euclidiana, una de las transformaciones más profundas del pensamiento científico, pues demostró que el espacio no era un dato de la experiencia, sino una construcción lógica.

El paso de Euclides a Lobachevsky representa un cambio de paradigma: de la geometría como descripción del mundo visible a la geometría como modelo del pensamiento. Como sostiene Hartshorne (2000), el sistema de Los Elementos no pretende describir la realidad física, sino exhibir un orden de razonamiento. Cada definición y cada demostración no dependen de la intuición visual, sino de la validez interna de los argumentos. Este modo de proceder influyó profundamente en la filosofía, la física y la lógica, convirtiendo a la geometría en una escuela de pensamiento riguroso.

El método euclidiano: definir, suponer y deducir estableció la arquitectura del razonamiento científico. Los Elementos enseña que el conocimiento no surge del azar ni de la observación empírica, sino de la articulación ordenada de principios. En su estructura late una pedagogía de la claridad: el diagrama orienta la mirada, pero la verdad pertenece al argumento. Como recuerda Stillwell (2010), el impacto de esta obra es tan profundo que “toda demostración matemática, aun la más moderna, sigue siendo en el fondo un eco de Euclides”.

Desde la mirada contemporánea, los postulados no son solo afirmaciones geométricas: son condiciones de posibilidad del pensamiento lógico. Cada uno invita a reflexionar sobre la naturaleza de la evidencia y la necesidad del orden. Así, el primero enseña la noción de conexión; el segundo, la idea de extensión; el tercero, la medida como invariancia; el cuarto, la igualdad como simetría; y el quinto, la tensión entre lo local y lo infinito.

Apoyo didáctico: el docente propone a los estudiantes reconstruir los postulados a partir de experiencias manipulativas. Utilizan hilo y alfileres para representar líneas y puntos sobre una cartulina; luego comparan los resultados con construcciones en GeoGebra. El aula se transforma en un laboratorio epistemológico donde los alumnos comprenden que el postulado no es una verdad eterna, sino una decisión sobre el tipo de espacio que se quiere pensar.

Hilbert: hacer explícito lo implícito

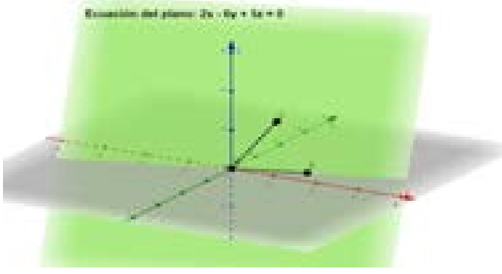
Hilbert redefinió los conceptos fundamentales: punto, línea y plano, no como entidades intuitivas derivadas de la percepción espacial, sino como objetos abstractos relacionados entre sí por medio de axiomas. Esta visión formalista implicó que los términos básicos carecían de significado empírico y se definían únicamente por las relaciones que establecían dentro del sistema (Corry, 2004). Así, la geometría pasó de ser una descripción del espacio físico a un sistema deductivo cerrado, donde la validez de una proposición dependía exclusivamente de su consistencia interna y no de su correspondencia con la realidad sensible (Torretti, 2000).

Estructura del sistema axiomático de Hilbert

1. **Incidencia:** Regula la relación entre puntos, rectas y planos. Por ejemplo, establece que por dos puntos distintos pasa una sola recta, y que por tres puntos no colineales pasa un plano único. Este grupo de axiomas garantiza la existencia y unicidad de los elementos geométricos fundamentales.

Figura 3.

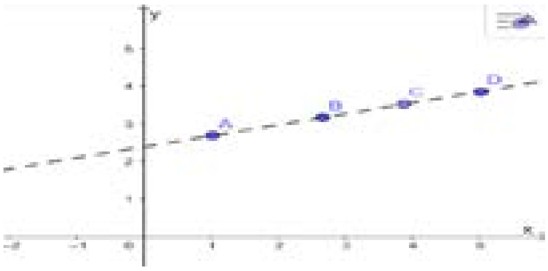
Representación geométrica de un plano y la relación de incidencia entre puntos, rectas y superficies



Nota: Elaboración Propia.

2. **Orden:** Define la relación "entre" los puntos de una línea, introduciendo la posibilidad de ordenar los puntos. Establece propiedades como la transitividad y la existencia de puntos intermedios.

Figura 4.
Representación del axioma de orden y la relación "entre" en una línea recta

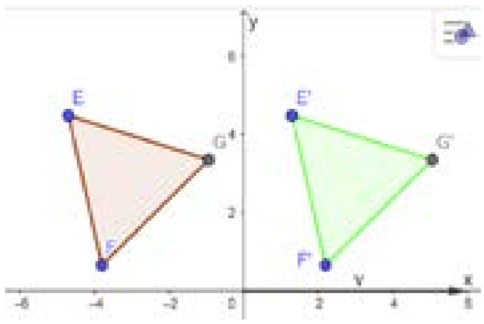


Nota: Elaboración propia.

- **Relación "Entre":** Permite establecer cuándo un punto B está localizado entre otros dos puntos (A y C), lo cual es la base para la medición y la dirección en una dimensión.
- **Transitividad:** Asegura una secuencia lógica y consistente. Si B está entre (A y C) y C está entre (B y D), la secuencia es coherentemente A, B, C, D.
- **Existencia de puntos intermedios:** El sistema garantiza que entre dos puntos distintos cualesquiera en una línea, siempre hay un tercer punto, lo que sienta las bases para el concepto de continuidad y la estructura densa de la línea recta.

3. **Congruencia:** Regula la igualdad de segmentos y ángulos, asegurando que los cuerpos geométricos puedan trasladarse o superponerse sin alterar su medida. Este principio permite el desarrollo de la noción de igualdad geométrica sin depender de una interpretación física del movimiento.

Figura 5.
Representación del principio de congruencia mediante la traslación de un triángulo en el plano



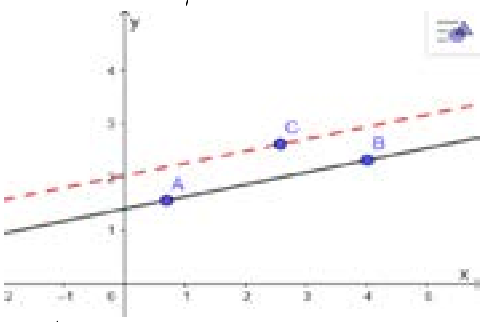
Nota: Elaboración propia.

La imagen muestra dos triángulos, **E'F'G** y **E'F'G**, que son exactamente iguales en forma y tamaño, aunque estén ubicados en distintas posiciones del plano. El segundo triángulo se obtiene al trasladar el primero mediante un vector, sin modificar sus medidas ni sus ángulos. Esta representación ejemplifica el principio de congruencia propuesto en el sistema axiomático de Hilbert, según el cual la igualdad geométrica no depende de mover físicamente las figuras, sino de una relación lógica que asegura que sus elementos correspondientes conservan la misma magnitud dentro del marco de la geometría formal.

4. **Paralelismo:** Formaliza el postulado de las paralelas de Euclides, pero lo integra dentro de una estructura lógica más general: por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella. Su tratamiento formal permitió estudiar los sistemas alternativos, como las geometrías no euclidianas, desde una base axiomática común (Gray, 2018).

En el sistema de Hilbert, el paralelismo se entiende como una relación estrictamente lógica entre puntos y rectas, no como una observación visual. Su axioma establece que, por un punto exterior a una recta, solo puede trazarse una única recta paralela a la dada, es decir, una que nunca la interseque. Este principio da estructura a la geometría euclidiana y permite deducir propiedades esenciales, como la igualdad de los ángulos alternos internos o la suma de 180° en los triángulos. Hilbert reformuló este postulado con un lenguaje más preciso para eliminar ambigüedades y garantizar la coherencia del sistema, de modo que la idea de "paralelismo" no dependa de la intuición del dibujo, sino de una definición exacta dentro del razonamiento geométrico.

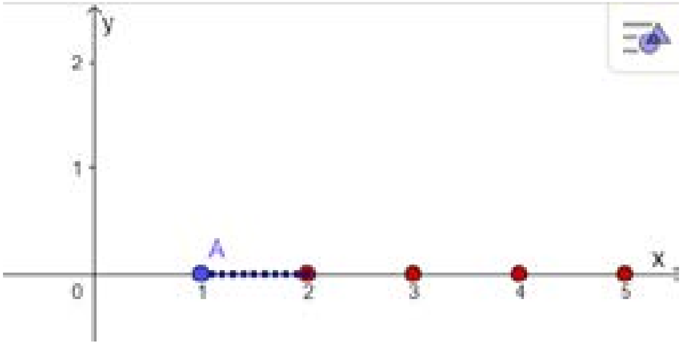
Figura 6.
Representación axiomática del paralelismo en el sistema de Hilbert



Nota: Elaboración propia.

5. **Continuidad y completitud:** Introduce axiomas que garantizan la continuidad de la línea recta y la completitud del sistema. Hilbert utilizó ideas inspiradas en la teoría de los números reales para asegurar que no existieran "lagunas" en el espacio geométrico, reforzando la idea de un sistema sin contradicciones ni indeterminaciones (Hilbert, 1899/1971; Torretti, 2000).

Figura 7.
Representación de la continuidad geométrica mediante puntos intermedios entre A y B



Nota: Elaboración propia.

Si elegimos dos puntos, por ejemplo, A en el 1 y B en el 5, siempre podremos encontrar otros puntos entre ellos, como el 2, el 3 o incluso el 2.5 y el 2.75, sin llegar nunca a un límite de división. Esto significa que el espacio geométrico está lleno y no tiene "huecos", del mismo modo que los números reales forman una secuencia continua. En el aula, se puede mostrar esta idea con GeoGebra, trazando una recta y generando puntos entre A y B para que los estudiantes comprendan que la recta puede subdividirse infinitamente, reflejando la continuidad del pensamiento geométrico que Hilbert

El aporte de Hilbert representó un cambio epistemológico radical: la geometría dejó de ser un conocimiento derivado de la intuición espacial, como en Euclides o Kant, para convertirse en un sistema formal independiente del contenido empírico.

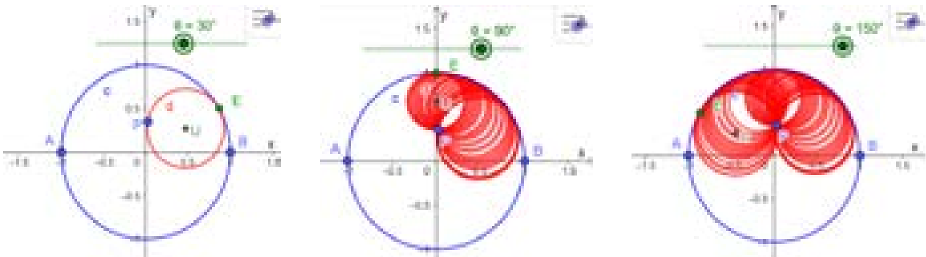
En palabras de Torretti (2000), la geometría hilbertiana no describe el espacio físico, sino que constituye un modelo abstracto donde la verdad se define en términos de coherencia interna. Esta visión influyó decisivamente en el desarrollo de la matemática moderna, la lógica formal y la teoría de modelos, siendo un precedente directo del pensamiento estructuralista del siglo XX (Corry, 2004).

Geometrías no euclidianas: negar el postulado sin caer en el absurdo
Durante siglos se intentó demostrar el postulado de las paralelas a partir de los otros. El punto de inflexión llega cuando Lobachevski y Bolyai muestran que negar esa afirmación produce una teoría coherente.

En la geometría hiperbólica, por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas y los triángulos tienen suma de ángulos menor que 180 grados. Beltrami construye los primeros modelos internos que certifican su consistencia relativa; más tarde, el disco de Poincaré y el modelo de Klein permiten hacer cuentas explícitas con geodésicas que se ven como arcos de circunferencia o cuerdas del disco.

La secuencia de imágenes siguientes muestra, dentro del disco de Poincaré, cómo por un punto exterior P a la recta AB (en azul) pueden trazarse infinitas rectas hiperbólicas paralelas. En la figura (a), el punto E define una primera geodésica roja que pasa por P sin cortar a AB; en la (b), al variar el ángulo θ el punto E se desplaza por la frontera del disco, generando nuevas circunferencias ortogonales que también pasan por P; y en la (c), al continuar moviendo E, se obtiene un abanico de infinitas geodésicas que no intersecan la recta azul. Esta representación visualiza el postulado hiperbólico: por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas, negando así el quinto postulado de Euclides y evidenciando la naturaleza divergente del espacio hiperbólico.

Figura 8.
Visualización del postulado hiperbólico en el disco de Poincaré: generación de infinitas paralelas desde un punto exterior



Nota: Elaboración propia.

Riemann describe otra alternativa, la elíptica, donde no existen paralelas y las geodésicas se comportan como grandes círculos en la esfera con identificación de antipodales (Bonola, 1955; Greenberg, 2011; Gray, 2018).

El impacto conceptual es doble. Por un lado, "espacio" deja de ser una intuición única. Por otro, se instala la idea moderna de que lo geométrico se define por sus invariantes bajo transformaciones aceptadas, línea que Klein formula con claridad en el Programa de Erlangen y que organiza la disciplina por grupos de simetrías más que por listas de propiedades (Klein, 2004; Gray, 2018). Aquí el método axiomático muestra toda su fuerza: no obliga a una única geometría, describe familias de mundos posibles y nos enseña a compararlos.

Apoyo didáctico: Traer este arco histórico al aula ayuda a formar pensamiento matemático con sentido. Tres preguntas vertebran una secuencia didáctica:

a) ¿Qué aceptamos sin prueba? Identificar axiomas en un texto escolar y reescribir un teorema simple marcando exactamente dónde se usan. Objetivo: pasar del dibujo persuasivo al argumento sustentado.

b) ¿Qué pasa si cambiamos un axioma? Construir en un software dinámico un triángulo en el disco de Poincaré y medir la suma de ángulos. Objetivo: comprender independencia e implicaciones del axioma de las paralelas.

c) ¿Qué permanece invariante? Clasificar problemas por el tipo de transformaciones que conservan su solución (isometrías, proyecciones, afinidades). Objetivo: adoptar la mirada estructural de Klein en problemas accesibles.

Estas tareas no buscan "contar historia", sino usar la historia para pensar mejor: explicitar supuestos, argumentar con claridad y reconocer estructuras.

Conceptos fundamentales: punto, recta, plano y posición relativa

La geometría no solo es un campo de estudio matemático, sino un modo de organizar el pensamiento humano sobre el espacio. En su origen, fue una ciencia empírica nacida de la necesidad de medir, delimitar y representar el entorno. Pero a lo largo de la historia la geometría se ha convertido en un lenguaje formal que busca expresar las relaciones universales de forma, dirección y extensión (Heath, 1956; Hilbert, 1971).

Hoy, sin embargo, enseñar geometría no puede reducirse a reproducir axiomas o algoritmos: implica también comprender las ideas que sustentan el razonamiento espacial. Como afirma Freudenthal (1973), "la geometría debe ser redescubierta por los estudiantes como una actividad humana significativa, no como un conjunto de verdades ya acabadas".

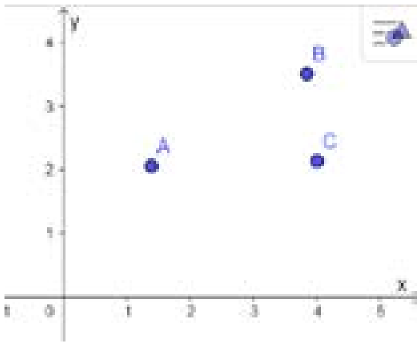
En este marco, los conceptos de punto, recta, plano y posición relativa no son meros elementos definitorios, sino estructuras de pensamiento que permiten conceptualizar el espacio desde una lógica de relaciones, movimientos y transformaciones.

El punto: entre la abstracción y la intuición perceptiva

El punto ha sido, desde los albores de la geometría, una de las nociones más enigmáticas y fascinantes. A primera vista, parece ser lo más simple: un pequeño trazo sobre una superficie, una marca o un instante de atención. Sin embargo, bajo esa aparente simplicidad se oculta una de las ideas más profundas del pensamiento matemático. Euclides lo definió como "aquello que no tiene partes", una entidad sin extensión ni anchura, pero con presencia intelectual, un lugar donde el espacio comienza a adquirir significado (Heath, 1956). Esa definición, que ha perdurado más de dos mil años, muestra una tensión entre lo visible y lo invisible, entre lo que el ojo percibe y lo que la mente comprende.

Desde una mirada moderna, Hilbert (1971) retoma el punto como uno de los términos primitivos del sistema axiomático. No lo describe, simplemente lo postula. Para él, el punto no se define por lo que "es", sino por las relaciones que mantiene con otros elementos: la recta, el plano, la distancia. En su concepción, el significado del punto no depende de la experiencia sensorial, sino del papel que cumple dentro de una estructura lógica coherente. De este modo, la geometría se emancipa de la intuición empírica para convertirse en un lenguaje formal de relaciones abstractas.

Figura 9.
Representación de puntos como elementos primitivos en la geometría hilbertiana

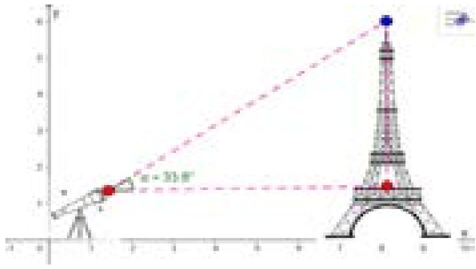


Nota: Elaboración propia.

No obstante, reducir el punto a un símbolo lógico puede empobrecer su riqueza cognitiva y fenomenológica. En el pensamiento humano, la noción de punto no nace de la abstracción pura, sino del contacto directo con el entorno. Piaget e Inhelder (1971) demostraron que la representación del espacio se forma progresivamente: el niño primero actúa y se orienta en el espacio físico, identifica lugares, direcciones y distancias, y solo después logra comprender el punto como posición sin extensión. En este sentido, el punto no es una entidad preexistente, sino una construcción mental que sintetiza la experiencia de situarse y ubicarse.

Esta perspectiva encuentra resonancia en la fenomenología del espacio de Merleau-Ponty (1945), quien sostiene que el cuerpo es la condición de posibilidad de toda percepción. El punto, desde esta óptica, no es una abstracción vacía, sino la expresión de una mirada encarnada: señalar, detenerse, mirar, marcar un lugar. Todo acto de "colocar un punto" es una forma de afirmar la presencia del sujeto en el mundo. Enseñar geometría, entonces, implica enseñar a mirar, a localizar, a descubrir el espacio como experiencia corporal antes que como sistema lógico.

Figura 10.
Visualización del acto perceptivo en la geometría: el punto como mirada encarnada



Nota: Elaboración propia.

La psicología del aprendizaje geométrico aporta además una dimensión formativa. Según Duval (1998), comprender el punto exige coordinar distintos registros semióticos: el gráfico, el simbólico, el verbal y el algebraico. Un estudiante puede reconocer un punto en una figura, pero no necesariamente comprender su papel en una ecuación o en un sistema de coordenadas. La enseñanza debe propiciar ese tránsito entre lo visible y lo conceptual, entre el dibujo y la formulación. El punto no es solo un signo en el papel: es un objeto semiótico que adquiere sentido al ser movilizado en diferentes contextos (Godino & Batanero, 2007).

Apoyo didáctico: El punto, en su aparente insignificancia, condensa toda una epistemología del conocimiento geométrico. Es el lugar donde se cruzan el pensamiento sensible y el pensamiento lógico. En el aula, enseñar el punto sin reconocer su raíz perceptiva equivale a pedirle al estudiante que comprenda un signo sin sentido. Pero enseñar el punto solo desde la intuición, sin conectarlo con su función estructural, sería limitarlo a una experiencia sin abstracción. La enseñanza verdaderamente formadora es aquella que integra ambas dimensiones: la vivencia del espacio y la formalización del pensamiento.

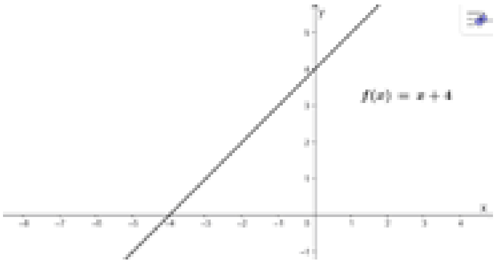
En palabras de Hilbert, el punto no necesita definirse, porque "su verdad se mide en la coherencia del sistema que lo contiene" (Hilbert, 1971). En términos pedagógicos, esa coherencia se construye cuando el aprendizaje logra unir la acción, la intuición y la razón.

La recta: estructura del orden y la dirección.

La recta constituye uno de los pilares conceptuales de la geometría. Si el punto representa la posición, la recta introduce la noción de dirección, de continuidad y de orden. Desde Euclides hasta la geometría moderna, la recta ha simbolizado la idea de lo inmutable dentro del cambio, el hilo invisible que organiza el espacio. En Los Elementos, Euclides la definió como "una longitud sin anchura", y añadió que "está dispuesta uniformemente respecto a los puntos que la componen" (Heath, 1956). Esa descripción, aparentemente sencilla, encierra una concepción profunda: la recta es una continuidad ideal, un objeto que la experiencia humana solo puede aproximar, pero nunca reproducir por completo.

En el pensamiento clásico, la recta era la imagen de la perfección geométrica. Hilbert (1971) reformuló su sentido dentro del sistema axiomático moderno: ya no como un trazo visible, sino como un ente primitivo definido únicamente por su relación con los puntos y los planos. En este marco, la recta es una entidad lógica que cumple funciones de alineación y orden dentro de un espacio abstracto. Su significado ya no depende de la percepción, sino de la consistencia interna del sistema. Sin embargo, esta concepción, necesaria para la formalización matemática, puede volverse opaca para el aprendizaje si no se conecta con la experiencia perceptiva que le da origen.

Figura 11.
La recta como continuidad ideal en la geometría clásica y moderna



Nota: Elaboración propia.

Apoyo didáctico: Desde el punto de vista cognitivo, Piaget e Inhelder (1971) observaron que la noción de recta surge de la experiencia de desplazamiento y orientación. El niño concibe primero trayectorias, caminos y bordes; solo más tarde logra representar la recta como una prolongación indefinida sin grosor. En términos fenomenológicos, la recta es una abstracción de la acción, una huella idealizada del movimiento humano. Por eso, enseñar la recta no consiste en mostrar una figura perfecta, sino en guiar la transición desde la experiencia corporal del recorrido hasta la comprensión de una dirección infinita.

Duval (1998) enfatiza que la comprensión de la recta exige coordinar varios registros semióticos: el perceptivo (ver una línea trazada), el operacional (prolongarla o construir su perpendicular), y el discursivo (expresarla mediante ecuaciones o relaciones). En este sentido, la recta es un ejemplo paradigmático de cómo la geometría articula visión y razonamiento.

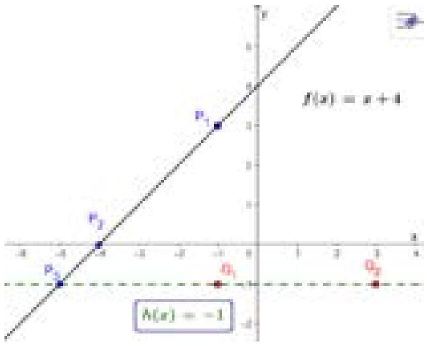
Para Tall (2014), la recta permite al estudiante pasar del pensamiento visual a la representación simbólica del cambio: entender la pendiente, la dirección y la relación entre variables es, en última instancia, un modo de pensar la continuidad.

La recta como idea de orden y medida

En el sistema euclidiano, las rectas no solo conectan puntos, sino que establecen la posibilidad de comparar, medir y deducir. La alineación es la primera forma de establecer relaciones entre posiciones. Descartes llevó esta idea al terreno del análisis al asociar la recta con el eje de coordenadas, transformándola en soporte de la medida y fundamento del álgebra geométrica. Gracias a él, la recta dejó de ser solo una figura y se convirtió en una referencia numérica, un espacio donde el pensamiento geométrico y el algebraico se encuentran.

Figura 12.

La recta como soporte de la medida y referencia numérica en el sistema cartesiano



Nota: Elaaboración propia.

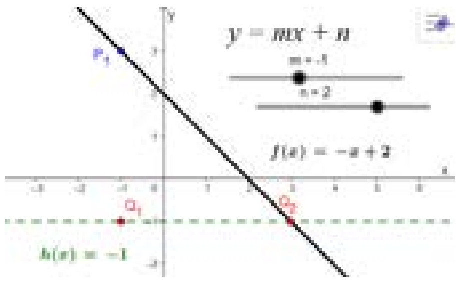
Como advierte Lakatos (1976), los conceptos matemáticos no son verdades inmutables, sino estructuras en evolución que surgen del diálogo entre conjeturas y refutaciones. Aplicado a la geometría, esto significa que la noción de recta se construye en la interacción entre intuición, error y justificación. Permitir que los estudiantes discutan qué es "recto" o cuándo dos puntos están "alineados" no debilita el rigor, sino que lo fortalece, porque lo hace consciente.

Cuando el alumno comprende que una recta puede prolongarse más allá del papel y que su existencia depende de la mente que la concibe, se acerca al corazón mismo de la geometría. Como escribió Hilbert (1971), "la recta no es una línea trazada, sino la expresión de una relación entre puntos dentro de un sistema coherente". En ella se encuentra, silenciosa pero firme, la lección más profunda de la matemática: que el pensamiento humano puede crear continuidad a partir de la nada.

Apoyo didáctico: Utilizar GeoGebra para representar una recta mediante su ecuación $y = mx + b$ permite al estudiante observar cómo una variación en la pendiente m transforma su inclinación. Así, lo algebraico y lo visual se integran en una sola estructura significativa.

El docente puede invitar a los estudiantes a trazar el recorrido más corto entre dos puntos en el aula o el patio, vinculando la recta con la idea de trayectoria mínima. Esta vivencia corporal, como sostienen Radford (2018), reactiva la conexión entre la cognición y la acción en la construcción del significado matemático.

Figura 13.
La recta como trayectoria mínima y soporte de significado en la acción matemática



Nota: Elaboración propia.

El plano: del espacio visible al espacio conceptual

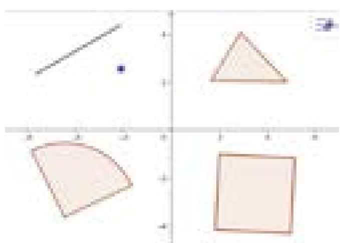
El plano constituye una de las ideas más ricas y difíciles de la geometría. Es el escenario donde se despliega todo el pensamiento geométrico: contiene puntos, rectas, figuras y movimientos. Desde la antigüedad, el plano fue concebido como una extensión infinita y bidimensional, un espacio sin espesor que sirve de soporte a la construcción de figuras.

El plano: del espacio visible al espacio conceptual

El plano constituye una de las ideas más ricas y difíciles de la geometría. Es el escenario donde se despliega todo el pensamiento geométrico: contiene puntos, rectas, figuras y movimientos. Desde la antigüedad, el plano fue concebido como una extensión infinita y bidimensional, un espacio sin espesor que sirve de soporte a la construcción de figuras.

En Los Elementos, Euclides lo definió implícitamente como la superficie sobre la que reposan los objetos geométricos, pero su descripción seguía ligada a la experiencia visual del artesano y del agrimensor (Heath, 1956). El plano era entonces el lugar donde se medía y se trazaba, donde la geometría se hacía visible.

Figura 14.
El plano como extensión bidimensional para la representación de puntos, rectas y figuras geométricas

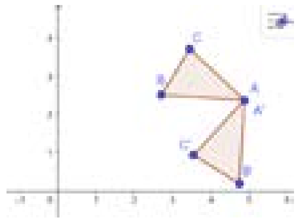


Nota: Elaboración propia.

Con el desarrollo del pensamiento abstracto, el plano dejó de ser solo un soporte para convertirse en un espacio conceptual. En la modernidad, Hilbert (1971) lo integró como un término primitivo dentro del sistema axiomático, al igual que el punto y la recta. Ya no era una superficie que se "ve", sino una entidad que se postula: una estructura donde las relaciones son más importantes que las apariencias. Así, el plano pasó de ser un objeto de la mirada a ser un objeto del pensamiento, una idea que organiza la coherencia interna del espacio geométrico.

Ejemplo: Si tomamos un triángulo y lo rotamos 90° o lo trasladamos 5 unidades hacia la derecha, sigue teniendo los mismos lados, ángulos y área.

Figura 15.
Transformaciones rígidas y conservación de propiedades invariantes en un triángulo euclidiano



Nota: Elaboración propia.

Las propiedades invariantes son la distancia entre puntos y los ángulos.

Esto define la geometría euclidiana clásica, donde se estudian figuras congruentes y la métrica del espacio.

Ejemplo: Si aplicamos una dilatación a un rectángulo, este puede convertirse en un paralelogramo, pero las rectas paralelas siguen siendo paralelas.

Figura 16.
Conservación de la paralelidad en una transformación afín de un cuadrilátero

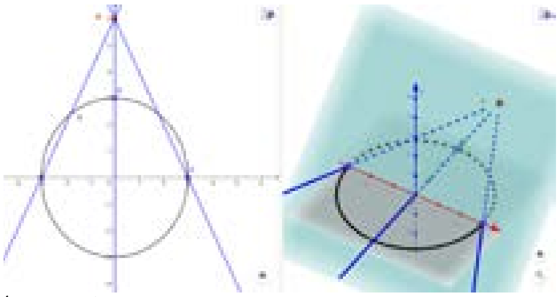
Nota: Elaboración propia.

La invariante aquí es la paralelidad, aunque se pierde la medida de los ángulos y las distancias.

Esto corresponde a la geometría afín, donde el foco está en la estructura de la forma y no en su tamaño.

Ejemplo: En la vista 2D se aprecia la figura original con sus líneas de proyección, mientras que en la vista 3D se observa el proceso de transformación espacial: los rayos que parten de P interceptan el plano inclinado y generan la imagen proyectada. Aunque la forma cambia, la concurrencia y la alineación de los puntos se conservan, ilustrando de manera clara los principios de la geometría proyectiva y su relación con la perspectiva visual y la representación espacial.

Figura 17.
Proyección central de una figura: vista 2D y vista 3D del proceso de transformación proyectiva



Nota: Elaboración propia.

Esta evolución epistemológica alcanza un punto decisivo con la teoría de los grupos de transformaciones de Felix Klein (2004). Para Klein, la esencia de la geometría no reside en las figuras en sí, sino en las transformaciones que preservan sus propiedades. Desde esta perspectiva, el plano no es un escenario pasivo, sino un campo dinámico donde se estudian las invariantes: aquellas relaciones que permanecen constantes bajo desplazamientos, rotaciones, simetrías o dilataciones. Pensar geométricamente significa, entonces, comprender lo que permanece dentro de lo que cambia.

Apoyo didáctico: Freudenthal (1973) retomó esta idea desde una mirada didáctica y la proyectó hacia el aprendizaje escolar. Para él, el plano debe ser entendido como un modelo del espacio vivido, un puente entre la experiencia del estudiante y la abstracción matemática. El aprendizaje geométrico comienza cuando el alumno logra reconocer en el plano una representación de su propio entorno: la pizarra, el suelo, una hoja o la pantalla del computador. Desde ahí se puede transitar hacia la comprensión del plano como un espacio conceptual de relaciones.

Duval (1998) profundizó esta perspectiva al afirmar que el pensamiento geométrico depende de la capacidad de cambiar de registro de representación. En el plano, las figuras no son fines en sí mismas, sino medios para expresar relaciones: paralelismo, perpendicularidad, simetría o equivalencia. Aprender geometría implica, por tanto, aprender a pensar en invariantes y no solo en formas estáticas. El plano es el lugar donde la mente ensaya esas transformaciones, donde se descubren patrones de cambio y de conservación.

Desde el punto de vista cognitivo, Piaget e Inhelder (1971) demostraron que la comprensión del plano surge a partir de la coordinación de dos experiencias fundamentales: la percepción del espacio y la acción motriz. El niño, al desplazarse o dibujar, experimenta que los objetos se ubican sobre una superficie que puede extenderse más allá de lo visible. A partir de esa vivencia, el plano se convierte en una idea reguladora, una estructura que organiza la posición y el movimiento.

Apoyo didáctico: En la enseñanza de la geometría, el plano cumple una función integradora: articula los conceptos de punto y recta, pero también anticipa la noción de coordenadas, áreas y funciones. Desde un punto de vista didáctico, Godino y Batanero (2003) sostienen que el aprendizaje de los objetos matemáticos debe incluir tanto su dimensión fenomenológica (cómo se experimentan) como su dimensión semiótica (cómo se representan). El plano permite esta doble mediación: puede tocarse y verse, pero también imaginarse y simbolizarse.

Posición relativa: encuentros, paralelismos y perpendicularidad
La noción de posición relativa entre puntos, rectas y planos es una de las más antiguas y esenciales de la geometría. Desde los primeros trazos en la arena hasta los diagramas dinámicos de los entornos digitales actuales, el ser humano ha intentado comprender cómo los objetos se relacionan en el espacio: cuándo se cruzan, cuándo se alejan y cuándo se mantienen equidistantes. Estas relaciones no solo configuran la estructura del espacio geométrico, sino también la forma en que pensamos la proximidad, el límite y la dirección.

En la tradición clásica, Euclides (2002) estableció las bases de estas relaciones a través de sus postulados y teoremas. En su sistema, dos rectas pueden interceptarse en un punto, ser paralelas si no se cortan, o ser perpendiculares si forman ángulos rectos. A partir de esas tres condiciones, se edificó todo el edificio de la geometría plana. Sin embargo, como recuerda Heath (1956), estas definiciones no son empíricas, sino conceptuales: no describen cómo se ven las rectas en el mundo, sino cómo deben comportarse dentro de un sistema ideal.

Figura 18.
Intersección, paralelismo y perpendicularidad como relaciones fundamentales entre rectas en geometría euclidiana

Nota: Elaboración propia.

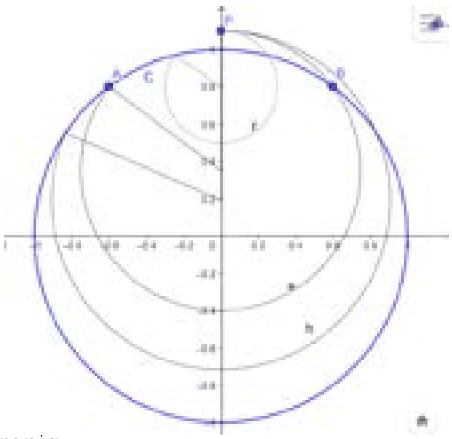
La posición relativa no es solo un tema técnico, sino también una experiencia cognitiva. Según Piaget e Inhelder (1971), el niño primero percibe las posiciones en términos de contacto o separación: los objetos "se tocan" o "no se tocan". Luego, mediante la acción, descubre la alineación y la intersección, hasta que logra comprender las relaciones abstractas de paralelismo y perpendicularidad. Estas nociones surgen, entonces, como una coordinación progresiva de la acción y la percepción, que más tarde se interioriza en el pensamiento.

Intersección: el encuentro como fundamento

La intersección es la forma más básica de relación entre dos rectas. Representa el punto donde dos trayectorias se encuentran, el instante en que dos direcciones se reconocen. Desde el punto de vista lógico, la intersección expresa la coexistencia de condiciones: el punto pertenece a ambas rectas, lo que implica una relación de inclusión compartida. Pero más allá del simbolismo matemático, el encuentro entre dos rectas tiene un sentido profundo: introduce la noción de convergencia, la idea de que distintas direcciones pueden llegar a un mismo lugar.

Figura 19.

Construcción de arcos geodésicos y puntos notables en el modelo del disco de Poincaré



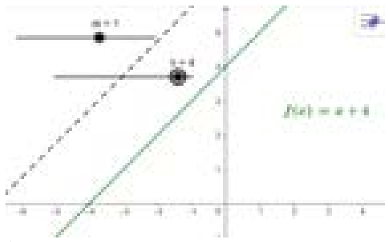
Nota: Elaboración propia.

El paralelismo ha sido históricamente una fuente de fascinación y controversia. Para Euclides, dos rectas son paralelas si están en el mismo plano y no se cortan, por más que se prolonguen indefinidamente. Detrás de esta definición se esconde el famoso quinto postulado, cuya naturaleza no evidente inspiró siglos de reflexión. Lobachevsky y Bolyai, al cuestionarlo, dieron origen a las geometrías no euclidianas, demostrando que el espacio puede concebirse de otros modos (Bonola, 1955).

En el ámbito didáctico, el paralelismo enseña una idea de invariancia en el cambio: aunque las rectas se extiendan o se desplacen, su distancia mutua permanece constante.

Apoyo didáctico: Este concepto puede explorarse a través de construcciones con regla y compás, pero también con software como GeoGebra, donde los estudiantes pueden mover rectas paralelas y observar que, sin importar la inclinación o la posición, nunca se cruzan. Duval (1998) señala que la visualización dinámica permite al alumno pasar del registro perceptivo al registro teórico, favoreciendo la comprensión de relaciones que no dependen del dibujo, sino de las propiedades lógicas del espacio.

Figura 20.
Visualización dinámica del paralelismo mediante el control de pendiente y posición en GeoGebra



Nota: Elaboración propia.

Perpendicularidad: el equilibrio de los contrarios

Si el paralelismo expresa armonía y estabilidad, la perpendicularidad representa equilibrio y oposición. Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando ángulos de 90 grados. Esta relación introduce el concepto de ortogonalidad, que será fundamental para el álgebra lineal, la trigonometría y el análisis vectorial. Pero más allá de su utilidad formal, la perpendicularidad ofrece una poderosa intuición visual: el orden que nace de la simetría.

En el aula, este concepto puede abordarse con actividades concretas. Los estudiantes pueden construir perpendiculares utilizando una escuadra, verificando visualmente los ángulos rectos, y luego trasladar esa experiencia al plano digital. En GeoGebra, la herramienta de "recta perpendicular" permite explorar cómo la posición depende de la dirección original. Al mover el punto de corte, se observa que la nueva recta cambia, pero el ángulo recto se conserva, reforzando la noción de invariante geométrica.

Tall (2014) explica que estas experiencias de manipulación visual favorecen el paso del pensamiento "encarnado" al pensamiento "formal". Cuando el estudiante comprende que la perpendicularidad no depende del dibujo, sino de una condición relacional (dos rectas que forman ángulos iguales), ha dado un salto conceptual hacia el razonamiento matemático.

Las nociones de intersección, paralelismo y perpendicularidad constituyen mucho más que capítulos de la geometría: son modos de pensar la relación entre lo distinto. Interceptarse es compartir un punto; ser paralelas es coexistir sin tocarse; ser perpendiculares es equilibrar opuestos. Estas relaciones, que nacieron como descripciones del espacio físico, se han convertido en estructuras universales del razonamiento humano.

Apoyo didáctico: Cuando el estudiante comprende que la posición relativa no depende del dibujo, sino de una lógica que puede generalizarse a cualquier contexto, ha alcanzado la verdadera comprensión geométrica.

En palabras de Hilbert (1971), "la geometría no trata del espacio, sino de la forma del pensamiento".

Razonamiento deductivo e inductivo en la construcción geométrica.

El razonamiento geométrico constituye una de las expresiones más refinadas del pensamiento matemático. En él se encuentran dos movimientos esenciales del conocer: la inducción, que permite descubrir regularidades y formular hipótesis a partir de la observación, y la deducción, que organiza el conocimiento mediante la argumentación lógica. Desde Euclides hasta la didáctica contemporánea, la tensión entre ambos modos de pensar ha modelado la forma en que la humanidad concibe el espacio, la forma y la medida.

Pero este debate no es solo teórico; tiene consecuencias directas en la forma en que enseñamos y aprendemos. El aula, en cualquier nivel educativo, se convierte en un laboratorio donde la mente oscila entre mirar y demostrar, entre imaginar y justificar. Hoy, con la mediación de herramientas digitales como GeoGebra, Desmos, ese laboratorio adquiere una nueva dimensión: los estudiantes pueden ver el razonamiento en acción, experimentar los teoremas como procesos dinámicos y explorar las relaciones entre intuición y formalización.

La inducción: el valor del descubrimiento en la era digital

Históricamente, la inducción ha sido el punto de partida del conocimiento geométrico. En las culturas antiguas el conocimiento geométrico era esencialmente empírico: se derivaba de la observación y la repetición de patrones (Katz, 2009). En el pensamiento moderno, Polya (1954) consolidó esta visión al señalar que todo razonamiento matemático comienza con una intuición descubridora, donde el estudiante "ve" una regularidad antes de poder explicarla.

Freudenthal (1973) profundiza esta idea al afirmar que el conocimiento matemático debe construirse como una reinvención guiada: el estudiante no recibe la verdad geométrica como un dogma, sino que la redescubre a través de la experiencia. De este modo, la inducción se convierte en una estrategia cognitiva y didáctica que otorga sentido al aprendizaje.

Sin embargo, autores como Hilbert (1971) y Brousseau (1986) advierten que la inducción por sí sola no garantiza la validez del conocimiento. Hilbert argumenta que la geometría, para ser ciencia, necesita independencia de la percepción y debe sustentarse en un sistema axiomático coherente. Brousseau agrega que el aprendizaje por experimentación sin guía puede conducir a “errores estabilizados”, es decir, a intuiciones falsas que se consolidan como creencias.

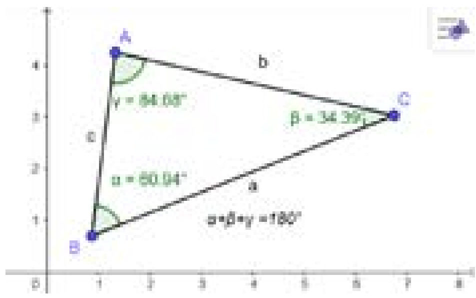
En este sentido, la introducción de recursos digitales ofrece una posibilidad intermedia: la inducción visual no se queda en lo sensorial, sino que permite observar patrones bajo condiciones controladas, por ejemplo, un docente puede pedir a los estudiantes que construyan varios triángulos en GeoGebra y midan la suma de sus ángulos interiores.

Al mover un vértice, los estudiantes observan cómo cambian los valores individuales pero la suma total se mantiene en 180°.

Esta observación repetida genera una conjetura inductiva validada por la experiencia digital: “La suma de los ángulos de un triángulo siempre es 180°”.

Lo que antes era una simple observación manual se convierte ahora en una inducción visual interactiva, donde el alumno puede manipular infinitas configuraciones en pocos segundos, comprobando la estabilidad de la relación. Así, la tecnología refuerza la generalización sin reemplazar el pensamiento. En palabras de Duval (1998), la visualización digital no es solo una ayuda perceptiva, sino un modo de representación que transforma la naturaleza del razonamiento mismo.

Figura 21.
Exploración dinámica de un triángulo isósceles y conservación de los ángulos en la base



Nota: Elaboración propia.

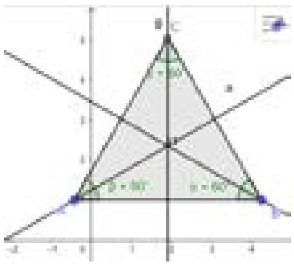
La deducción: de la certeza lógica a la comprensión conceptual
Si la inducción descubre, la deducción explica. En el método euclidiano, la deducción constituye el corazón del pensamiento geométrico: a partir de postulados, se derivan teoremas mediante inferencias lógicas. Euclides (2002) organizó Los Elementos como un edificio intelectual donde cada proposición se apoya en otra anterior, estableciendo un modelo de pensamiento riguroso que ha perdurado por más de dos milenios.

Sin embargo, varios autores han cuestionado la tendencia a enseñar la deducción como un fin en sí mismo. Freudenthal (1973) señala que la demostración formal pierde sentido cuando el estudiante no comprende su origen intuitivo. Del mismo modo, Godino y Batanero (2007) sostienen que enseñar a demostrar requiere partir de la necesidad del alumno por justificar una observación, no de la obligación de repetir un formato lógico.

Por ejemplo, los estudiantes pueden usar GeoGebra para construir un triángulo isósceles, trazar sus alturas y observar cómo los ángulos en la base se mantienen iguales al mover los vértices. Luego, con la guía del docente, pueden demostrar formalmente que esto se debe al principio de congruencia de triángulos. En este proceso, la tecnología actúa como mediadora entre lo perceptivo y lo lógico, fortaleciendo la comprensión de la demostración como un proceso racional y no meramente formal (Figura 22).

Hilbert (1971) defendía la deducción como el más alto nivel de pensamiento matemático, en la medida en que no depende de la observación sino de la coherencia interna. Sin embargo, Tall (2014) propone una ampliación: la deducción no debe entenderse como ruptura con la intuición, sino como una extensión de ella hacia el mundo formal. El pensamiento matemático, afirma Tall, transita entre tres mundos: el encarnado, el simbólico y el formal, y la enseñanza debe ayudar a los estudiantes a moverse entre ellos con naturalidad.

Figura 22.
Exploración dinámica de un triángulo isósceles y conservación de los ángulos en la base



Nota: Elaboración propia.

En la práctica, esto implica que el estudiante no solo aprenda a probar teoremas, sino a construir argumentos visuales y verbales. La deducción deja de ser un ritual lógico para convertirse en una experiencia de comprensión.

Diálogo crítico entre las dos formas de razonamiento

Las posturas de los autores muestran una tensión fecunda entre la experiencia y la formalización. Hilbert exige rigor; Freudenthal pide significado; Piaget observa desarrollo cognitivo; Duval enfatiza la mediación representacional; Tall destaca la conexión entre visualización y abstracción. Cada enfoque revela un aspecto del aprendizaje geométrico, pero ninguno agota su complejidad.

Desde la perspectiva piagetiana, la inducción y la deducción son fases complementarias de una misma construcción mental. El pensamiento inductivo aparece primero, ligado a la acción y la percepción, mientras que el deductivo emerge más tarde, cuando el niño puede operar sobre relaciones y no solo sobre objetos (Piaget & Inhelder, 1971). En cambio, desde la epistemología de Hilbert, la deducción no es un estadio, sino una exigencia universal del pensamiento matemático. Para él, la intuición no basta para garantizar la verdad; es necesario el sistema.

Duval (1998) introduce un matiz clave: la comprensión geométrica no depende solo del tipo de razonamiento, sino de la capacidad de cambiar de registro semiótico. Es decir, el estudiante debe aprender a pasar de la figura al lenguaje, del lenguaje al símbolo y del símbolo al argumento. Por tanto, la enseñanza debe integrar lo visual, lo verbal y lo lógico, y la tecnología puede facilitar esa integración al permitir ver y explicar simultáneamente.

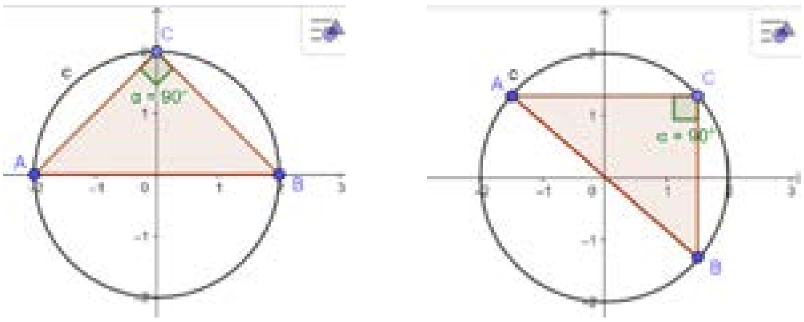
Freudenthal (1973) se distancia del formalismo hilbertiano, criticando la enseñanza que reduce la deducción a un ejercicio de autoridad. Para él, "demostrar" no significa aplicar reglas, sino comprender la necesidad de que algo sea como es. Esta idea coincide con la visión de Tall (2014), quien considera que la deducción debe presentarse como una extensión natural del pensamiento visual, no como su negación.

La mediación tecnológica como nuevo terreno epistemológico

En la actualidad, la incorporación de recursos digitales no solo modifica la didáctica, sino también la epistemología del aprendizaje geométrico. La posibilidad de manipular objetos matemáticos dinámicos cambia la forma en que el estudiante razona y valida el conocimiento. Lo digital se convierte en un "espacio intermedio" entre el mundo empírico y el formal: permite experimentar la deducción en movimiento.

Por ejemplo, al explorar el teorema de Thales en GeoGebra, el alumno puede trazar una circunferencia y observar que todos los triángulos inscritos en ella con un diámetro común son rectángulos.

Figura 23.
Triángulos inscritos con diámetro común: visualización interactiva del teorema de Thales



Nota: Elaboración propia.

Esta comprobación visual inmediata genera confianza, pero también plantea preguntas: ¿por qué ocurre esto? Esa curiosidad conduce a la deducción formal. Así, la herramienta digital actúa como un dispositivo epistémico que estimula la transición entre ver, conjeturar y demostrar.

En el contexto ecuatoriano, esta mediación tecnológica se vuelve especialmente relevante, ya que muchos estudiantes enfrentan dificultades para visualizar conceptos espaciales de forma abstracta. La geometría digital ofrece una oportunidad de inclusión cognitiva, permitiendo que quienes aprenden con estilos visuales o kinestésicos puedan acceder al razonamiento formal a través de la manipulación.

La historia del pensamiento geométrico puede leerse como una oscilación constante entre el descubrimiento y la demostración, entre la observación y el argumento. Lo que los autores nos enseñan es que no hay verdadera deducción sin inducción significativa, ni inducción valiosa sin deducción que la estructure. Enseñar geometría, por tanto, no consiste en elegir entre ver o razonar, sino en enseñar a ver razonando y a razonar viendo.

El desafío contemporáneo consiste en equilibrar el rigor lógico con la comprensión intuitiva, incorporando la tecnología no como fin, sino como mediadora del pensamiento. Las herramientas digitales no sustituyen la argumentación, pero sí la enriquecen, al permitir experimentar la lógica del espacio de manera dinámica y colaborativa.

Como afirmó Tall (2014), "la mente matemática madura cuando el ojo, la mano y la palabra se unen en un mismo acto de comprensión". La geometría, en su diálogo eterno entre inducción y deducción, nos enseña precisamente eso: a unir la mirada, el gesto y el pensamiento en una forma de conocimiento que es a la vez racional, estética y humana.

Conclusiones

El recorrido desarrollado en este capítulo permite comprender que la geometría no es únicamente una rama de las matemáticas dedicada al estudio del espacio, sino una forma de pensamiento que el ser humano ha construido para comprender, representar y transformar su entorno. A lo largo de su historia, esta disciplina ha unido la experiencia sensorial con la abstracción racional, ofreciendo una mirada que busca en lo visible el orden y en lo pensado la coherencia. Desde las mediciones empíricas de las civilizaciones antiguas hasta las representaciones dinámicas que hoy posibilitan los entornos digitales, la geometría ha conservado un mismo propósito: explicar la forma del mundo a través de la razón, la medida y la belleza.

En la actualidad, la enseñanza de la geometría se ha revitalizado gracias a la incorporación de recursos tecnológicos que amplían las posibilidades de explorar, visualizar y demostrar. Las herramientas digitales permiten que el estudiante observe, manipule y comprenda los objetos geométricos en movimiento, descubriendo regularidades y justificando sus conclusiones con una lógica propia. De esta manera, la demostración deja de ser un acto mecánico para convertirse en una experiencia viva de razonamiento, en la que se integran la intuición, la observación y la argumentación. La tecnología, bien utilizada, no sustituye el pensamiento matemático, sino que lo amplifica y le devuelve su dimensión creativa y reflexiva.

Así entendida, la geometría continúa siendo una escuela del pensamiento, una forma de mirar y comprender el mundo con precisión, equilibrio y profundidad. Enseñarla hoy significa fomentar la capacidad de descubrir relaciones, de razonar con claridad y de encontrar sentido en las estructuras del espacio y del cambio. Cada punto, cada línea y cada figura se convierten entonces en una expresión de la inteligencia humana, en una invitación a pensar el orden del universo y a reconocer en ese orden la armonía entre la percepción y la idea.

Referencias

Aurenhammer, F. (1991). Voronoi diagrams—A survey of a fundamental geometric data structure. ACM Computing Surveys, 23(3), 345–405. https://doi.org/10.1145/116873.116880

Bonola, R. (1955/1906). Non-Euclidean geometry: A critical and historical study of its development (H. S. Carslaw, Trad.). Dover.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2019). A history of mathematics (3rd ed.). Wiley.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33–115.

Corry, L. (2004). Modern algebra and the rise of mathematical structures (2nd ed.). Birkhäuser.

De Berg, M., Cheong, O., van Kreveld, M., & Overmars, M. (2008). Computational geometry: Algorithms and applications (3rd ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-77974-2

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (pp. 37–52). Kluwer Academic Publishers.

Euclides. (2002/ca. 300 a. e. c.). The elements (T. L. Heath, Trad.). Green Lion Press.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Reidel.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM Mathematics Education, 39(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Gray, J. (2018). Worlds out of nothing: A course in the history of geometry from parallel lines to hyperspheres (3rd ed.). Springer.

Greenberg, M. J. (2011). Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history (4th ed.). W. H. Freeman.

Hartshorne, R. (2000). Geometry: Euclid and beyond. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1210-2

Heath, T. L. (1956). The thirteen books of Euclid's Elements. Dover.

Hilbert, D. (1971/1899). Foundations of geometry (L. Unger, Trad., 2.º ed.). Open Court.

Katz, V. (2009). A history of mathematics: An introduction (3rd ed.). Addison-Wesley.

Klein, F. (2004/1872). Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry. Dover.

Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. Cambridge University Press.

Merleau-Ponty, M. (1945). Phénoménologie de la perception. Gallimard.

Netz, R. (2004). The shaping of deduction in Greek mathematics. Cambridge University Press.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1971). La representación del espacio en el niño (A. Muñoz, Trad.). Morata.

Polya, G. (1954). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. Wiley.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic thinking in early algebraic activity. Educational Studies in Mathematics, 97(1), 39–55. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Stillwell, J. (2010). Mathematics and its history (3rd ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6053-5

Tall, D. (2014). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202

Tarski, A., & Givant, S. (1999). Tarski's system of geometry. The Bulletin of Symbolic Logic, 5(2), 175–214.

Van Hiele, P. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Academic Press.

Capítulo II

Polígonos, áreas, circunferencia y círculo

Introducción

Hablar de ángulos y triángulos es adentrarse en el corazón de la geometría. Si en el capítulo anterior las figuras planas y el círculo revelaban la estructura del espacio y la medida de la curvatura, ahora el foco se desplaza hacia la relación entre líneas, inclinaciones y proporciones, es decir, hacia la comprensión del cambio dentro de la forma. Los ángulos y los triángulos son, en muchos sentidos, la gramática fundamental del lenguaje geométrico: con ellos se explica cómo las figuras se abren, cómo se orientan en el plano y cómo se conectan unas con otras a través de relaciones constantes.

Desde los primeros trazos de la humanidad sobre arena o piedra, los triángulos han sido herramientas de medición y conocimiento. Egipcios y babilonios los utilizaron para dividir terrenos y construir pirámides; los griegos, para fundamentar las primeras nociones de razón y proporción. En esa herencia histórica se encuentra el origen de la trigonometría, disciplina que, siglos

ISBN 978-9942-596-46-8 | 2025
https://editorial.risei.org

después, permitió calcular distancias celestes, orientar la navegación y comprender los ciclos de la naturaleza. Stewart (2016) recuerda que, sin la trigonometría, la física moderna y la astronomía habrían carecido del lenguaje necesario para describir el movimiento periódico y el equilibrio de las fuerzas.

Sin embargo, más allá de su utilidad técnica, el estudio de los triángulos y los ángulos posee un profundo valor formativo. Apostol (1991) subraya que las relaciones trigonométricas son una puerta al pensamiento funcional: expresan cómo una magnitud depende de otra, cómo el cambio en un ángulo produce una variación en una razón. En la enseñanza, esta comprensión trasciende lo numérico: invita al estudiante a pensar en relaciones, no solo en valores.

En el plano cognitivo, Duval (2017) advierte que los ángulos introducen un tipo de visualización particular: no basta con observar la figura, hay que imaginar el movimiento de los lados, el giro, la apertura. Este acto mental vincula la percepción con el razonamiento, y explica por qué el ángulo es, al mismo tiempo, una medida y un símbolo del dinamismo del espacio. Tall (2014) agrega que en este tránsito entre la experiencia visual y la formalización simbólica se desarrolla la base del pensamiento trigonométrico: una forma de razonar sobre lo continuo a partir de relaciones discretas.

Desde el punto de vista didáctico, el triángulo se convierte en un laboratorio privilegiado de la argumentación. Brousseau (2002) sostiene que las situaciones en torno a sus propiedades fomentan en el estudiante la búsqueda de justificaciones y la elaboración de conjeturas. En la práctica, medir un ángulo, comparar lados o demostrar la invariancia de las razones en triángulos semejantes son experiencias que transforman el aprendizaje en una actividad de descubrimiento y no en una repetición mecánica.

Por otra parte, Van Hiele (1986) señala que el desarrollo del pensamiento trigonométrico exige transitar por distintos niveles de comprensión. El estudiante comienza reconociendo figuras y medidas (nivel visual), luego identifica relaciones y patrones (nivel analítico) y, finalmente, construye un sistema formal que le permite generalizar (nivel deductivo). La enseñanza, por tanto, debe acompañar ese proceso con tareas que integren manipulación, observación y razonamiento simbólico.

En el mundo actual, donde la tecnología convierte el movimiento en datos y los ángulos en coordenadas, la trigonometría vuelve a adquirir un papel protagónico. Desde la ingeniería civil hasta la inteligencia artificial, sus principios sustentan los algoritmos que modelan trayectorias, reconstruyen imágenes o simulan entornos virtuales. Moreno-Armella y Sriraman (2005) destacan que esta continuidad entre geometría clásica y tecnología moderna es una oportunidad pedagógica: permite mostrar que las matemáticas son una forma viva de pensar, no un saber del pasado.

En el aula, el estudio de los triángulos y los ángulos puede convertirse en un espacio de integración entre la lógica y la creatividad. Al resolver problemas de construcción, el estudiante aprende a decidir, a justificar, a estimar. Al analizar funciones trigonométricas, descubre que detrás de las fórmulas hay un ritmo, una periodicidad, una forma de describir lo que cambia y vuelve a repetirse. Presmeg (2020) resalta que este sentido estético del conocimiento a saber de la capacidad de ver armonía en las relaciones, es tan importante como la precisión formal.

Por ello, este capítulo no se limitará a presentar las definiciones y teoremas tradicionales, sino que propondrá una lectura conceptual, visual y didáctica del triángulo y de las relaciones trigonométricas. Se abordarán los siguientes ejes:

- La noción de ángulo como medida del giro y expresión del movimiento en el plano.
- Los triángulos como estructuras de razonamiento y modelos de proporcionalidad.
- Las razones trigonométricas como herramientas para relacionar magnitudes y modelar fenómenos.
- Las funciones trigonométricas como extensión analítica del pensamiento geométrico.
- La enseñanza y evaluación del pensamiento trigonométrico, desde un enfoque constructivista y semiótico.

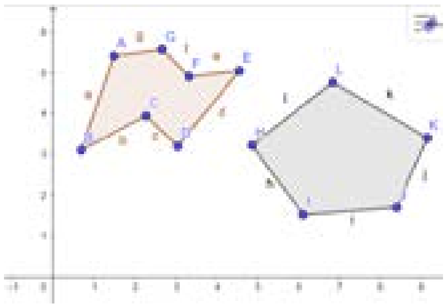
El propósito general será mostrar que la trigonometría no es un conjunto de reglas abstractas, sino una forma de pensar el cambio a partir de la geometría. Cada ángulo, cada triángulo y cada razón representan una relación entre lo estático y lo dinámico, entre la forma y la medida.

Así, al finalizar este capítulo, se espera que el lector comprenda que enseñar y aprender trigonometría es enseñar y aprender a razonar con el espacio, a traducir lo visible en estructura, y a descubrir en cada figura una huella del orden que habita el mundo.

Clasificación de polígonos: regulares e irregulares

La noción de polígono constituye una de las primeras formas de organización del pensamiento geométrico. A simple vista, un polígono es una figura cerrada delimitada por segmentos de recta, pero en el plano conceptual representa un modelo de estructura espacial, un modo de ordenar el mundo a partir de relaciones entre puntos, líneas y ángulos.

Figura 1.
Polígonos como estructuras espaciales: relaciones entre puntos, segmentos y ángulos



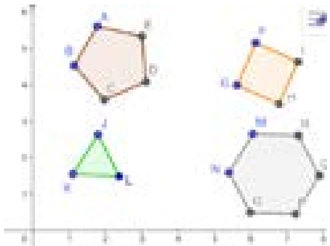
Nota: Elaboración propia.

Apostol (1991) lo considera una "representación del límite entre la medida discreta y la continuidad del espacio", una idea que permite enlazar la geometría con la aritmética y el álgebra en el proceso de aprendizaje.

En la historia del pensamiento matemático, los polígonos regulares fueron considerados símbolos de armonía y proporción. Los pitagóricos y Euclides les atribuyeron un valor filosófico: la regularidad como expresión de perfección. Sin embargo, la geometría moderna y la educación contemporánea los reinterpretan como modelos culturales de organización visual, más que como objetos absolutos. Presmeg (2020) sostiene que la geometría no puede reducirse a una descripción estática del espacio, sino que debe entenderse como una mediación cultural que refleja formas históricas de ver, construir y representar el mundo.

Desde una perspectiva cognitiva, Duval (1999) advierte que el pensamiento geométrico se distingue por su capacidad de articular registros de representación: el gráfico (la figura), el simbólico (las fórmulas) y el verbal (la descripción). Comprender un polígono no se limita a reconocerlo visualmente, sino a identificar qué propiedades permanecen invariantes cuando su forma cambia. Esta mirada permite superar la enseñanza memorística y avanzar hacia una comprensión relacional, donde los polígonos son sistemas de relaciones más que dibujos cerrados.

Figura 2.
Comparación de polígonos regulares según forma, número de lados y disposición espacial



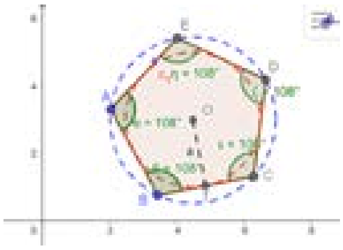
Nota: Elaboración propia.

El polígono regular (aquel cuyos lados y ángulos son congruentes) encarna el ideal de simetría y equilibrio; en cambio, el irregular desafía esa idea, mostrando que el conocimiento geométrico también surge de la diferencia y la variación.

Stewart (2016) enfatiza que en la enseñanza de la geometría es tan importante estudiar las formas perfectas como las imperfectas, porque solo en la comparación el estudiante descubre las propiedades que las definen.

Consideremos la figura siguiente para describir las propiedades de los polígonos regulares

Figura 3.
Propiedades angulares de un polígono regular: igualdad de lados, ángulos interiores y ángulos exteriores



Nota: Elaboración propia.

Lados y vértices: El número de lados n coincide con el número de vértices y ángulos. Cada lado tiene la misma longitud.

Ángulos interiores: Los ángulos interiores de un polígono regular son iguales entre sí, y su medida se calcula con la fórmula:

$$\textbf{Ángulo interior} = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

Ángulos exteriores: Los ángulos exteriores también son iguales, y su suma siempre es 360°, sin importar el número de lados:

$$\textbf{Ángulo exterior} = \frac{360^\circ}{n}$$

Simetría: Los polígonos regulares poseen:

1. Ejes de simetría que pasan por los vértices y los puntos medios de los lados.
2. Simetría rotacional, ya que al rotarse un ángulo de $\frac{360^\circ}{n}$ la figura coincide consigo misma.

Circunferencia circunscrita e inscrita: Todo polígono regular puede:

1. Inscribirse en una circunferencia (todos sus vértices pertenecen a ella).
2. Circunscribir una circunferencia (todos sus lados son tangentes a ella).

El centro de ambas coincide con el centro de simetría del polígono.

Apotema y área: La apotema $\left(\overline{\mathbf{OT}}\right)$ es el segmento perpendicular trazado desde el centro del polígono hasta el punto medio de un lado.

El área de un polígono regular puede calcularse como: A= $\frac{\mathrm{Pa}}{2}$ donde: **P** = perímetro del polígono y **a** = apotema.

Relación entre radio, lado y apotema: En un polígono regular, los radios, lados y apotema forman triángulos isósceles congruentes.

Si el radio es **R** y el número de lados **n**, el lado se puede expresar como:

$$\mathrm{l} = 2\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{180^\circ}{\mathrm{n}}\right)$$

y la apotema como:

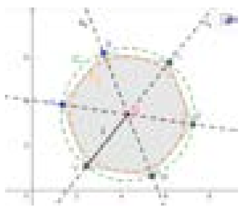
$$\mathrm{a} = \mathrm{R}\cos\left(\frac{180^\circ}{\mathrm{n}}\right)$$

Apoyo didáctico: El aprendizaje de las propiedades geométricas de los polígonos regulares y sus relaciones con las circunferencias requiere diseñar actividades que combinen la manipulación visual, el razonamiento geométrico y la argumentación matemática. De acuerdo con Duval (2017), la comprensión de las figuras geométricas depende de la coordinación entre los distintos registros semióticos de representación (figural, simbólico y discursivo). Por ello, los ejercicios deben permitir al estudiante pasar del dibujo al cálculo, y del cálculo a la explicación teórica.

Ejercicios de exploración visual y construcción: Los primeros ejercicios deben centrarse en reconocer y construir polígonos regulares utilizando herramientas como GeoGebra o materiales manipulativos. Por ejemplo, se puede pedir al estudiante construir un pentágono regular y trazar su circunferencia circunscrita, analizando cómo varía el radio cuando cambia la longitud del lado. Según Arzarello et al. (2014), la experimentación dinámica en entornos digitales facilita la visualización de invariantes geométricos y promueve la formulación de conjeturas.

Figura 4.

Hexágono regular: bisectrices interiores y relación con la circunferencia inscrita y circunscrita

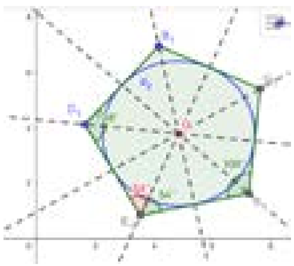


Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 1: "Construye un hexágono regular en GeoGebra. Dibuja las bisectrices de los ángulos interiores y observa su punto de intersección. ¿Qué relación guarda este punto con las circunferencias inscrita y circunscrita?". Estos ejercicios deben concluir con una discusión colectiva, en la que los estudiantes verbalicen las propiedades observadas y contrasten sus conjeturas con definiciones formales.

Ejercicios de razonamiento y justificación: Una segunda etapa debe enfocarse en el razonamiento geométrico y la justificación de propiedades, como la igualdad de los ángulos o la constancia del radio circunscrito. Brousseau (2002) plantea que las situaciones didácticas de validación favorecen la construcción del conocimiento matemático cuando el estudiante se enfrenta a la necesidad de justificar sus observaciones empíricas mediante argumentaciones deductivas.

Figura 5.
Pentágono regular: bisectrices interiores y centro de la circunferencia inscrita



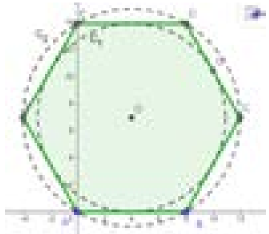
Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 2: "Demuestra que los ángulos interiores de un pentágono regular miden 108°. Luego, explica por qué el punto de intersección de las bisectrices coincide con el centro de la circunferencia inscrita."

Este tipo de ejercicios ayuda a transitar del nivel de visualización al de análisis y deducción, siguiendo los niveles de razonamiento geométrico propuestos por Van Hiele (1986).

Ejercicios de aplicación y resolución de problemas: Posteriormente, conviene incorporar ejercicios que involucren cálculos métricos y contextos aplicados. Tall (2014) sostiene que la comprensión profunda de los conceptos matemáticos surge cuando los estudiantes logran vincular las imágenes conceptuales con las definiciones formales. En este sentido, calcular áreas, perímetros, diagonales o radios mediante fórmulas debe integrarse con la interpretación geométrica de cada magnitud.

Figura 6.
Modelación geométrica de un polígono inscrito y circunscrito como aproximaciones a la realidad física



Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 3: "Diseña un jardín con forma de hexágono regular de 8 m de lado. Calcula la longitud del cerco necesario y la cantidad de césped que se debe cubrir. Representa las circunferencias inscrita y circunscrita e interpreta sus significados en el diseño."

Estos ejercicios contextualizados desarrollan competencias de modelación matemática, ya que conectan la geometría con la realidad física y la resolución de problemas prácticos.

Ejercicios de comparación y generalización: Finalmente, se recomienda plantear tareas que promuevan la generalización de propiedades a distintos tipos de polígonos. Según De Villiers (2010), la exploración de patrones y relaciones numéricas permite que los estudiantes descubran regularidades estructurales, como la relación entre el número de lados y los ángulos interiores o la tendencia de los radios inscritos y circunscritos.

Ejemplo 4: "Completa una tabla donde relaciones el número de lados n con los ángulos interiores, los radios **r y R**, y el cociente **r/R**. Analiza qué sucede cuando n tiende a infinito. "Este tipo de actividad estimula el pensamiento algebraico y variacional, acercando al estudiante a la idea del límite geométrico del polígono regular, que se aproxima al círculo.

Dimensión cognitiva y didáctica de la regularidad

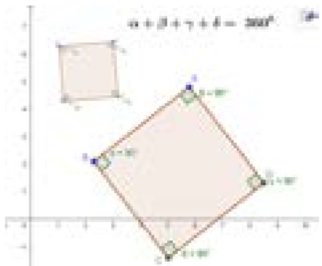
El estudio de los polígonos regulares e irregulares posee un enorme potencial didáctico, ya que permite observar el paso del pensamiento perceptivo al analítico. Van Hiele (1986) explicó que el desarrollo del razonamiento geométrico se produce en niveles: el primero es visual, basado en la apariencia; el segundo, analítico, centrado en las propiedades; y el tercero, relacional, donde se construyen jerarquías entre las figuras.

En este proceso, la regularidad cumple una función clave: es el patrón que permite reconocer lo común entre las diferencias.

Mariotti y Bussi (1998) destacan que enseñar geometría hoy implica reconstruir la figura como un objeto de pensamiento y no como un simple dibujo. La construcción de un polígono, sea con regla y compás o con herramientas digitales, es una acción reflexiva: al trazar, el estudiante explora relaciones y genera significados.

Moreno-Armella y Sriraman (2005) argumentan que las herramientas tecnológicas no sustituyen la abstracción, sino que la amplifican, al permitir que el alumno visualice la variación continua de las figuras y observe cómo ciertas propiedades tales como la congruencia de lados o ángulos permanecen invariantes.

Figura 7.
Exploración de relaciones angulares y estructurales mediante la construcción dinámica de polígonos



Nota: Elaboración propia.

Cuando un estudiante modifica un vértice de un polígono regular y observa cómo se conserva la suma de los ángulos interiores, está participando en un proceso de razonamiento dinámico, base de la comprensión formal.

Esta visión dialógica del aprendizaje geométrico transforma la enseñanza: la regularidad deja de ser una categoría cerrada y se convierte en un principio heurístico.

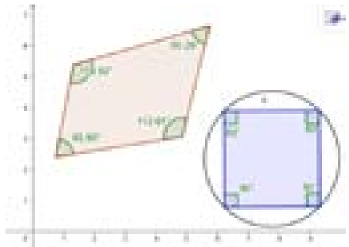
En lugar de preguntar “¿qué figura es esta?”, el docente puede promover preguntas como “¿qué condiciones hacen que una figura sea regular?” o “¿qué sucede si alteramos una de esas condiciones?”. Este cambio fomenta la curiosidad, la argumentación y la autonomía cognitiva, que según Duval (2017) son los verdaderos indicadores de comprensión matemática.

La irregularidad como desafío cognitivo y estético.

En el ámbito educativo, los polígonos irregulares suelen recibir menos atención, aunque su estudio resulta igualmente fundamental. Lejos de representar el “error” o la “falla” del modelo regular, la irregularidad constituye un espacio privilegiado para el razonamiento analítico.

Presmeg (2020) propone revalorizar la irregularidad como una forma legítima de pensamiento geométrico, donde el estudiante aprende a buscar orden dentro del desorden aparente.

Figura 8.
Contraste entre figura irregular y figura regular: reconocimiento de relaciones internas en geometría



Nota: Elaboración propia.

Desde una mirada cognitiva, Duval (1999) señala que el reconocimiento de una figura irregular requiere superar la percepción global y centrarse en las relaciones internas.

Es decir, un alumno comprende mejor una figura cuando puede analizar cómo se relacionan sus lados y ángulos, incluso si no son congruentes.

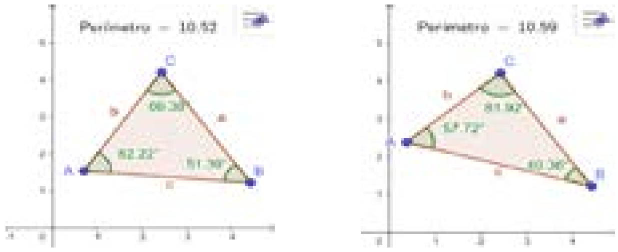
Este análisis de lo no simétrico desarrolla la flexibilidad mental y la capacidad de abstraer propiedades esenciales, habilidades clave en la formación matemática superior.

La irregularidad también tiene un valor estético y cultural. En arte, arquitectura y naturaleza, las formas irregulares son omnipresentes: desde los cristales hasta los patrones fractales.

Introducir esta perspectiva en el aula contribuye a vincular la matemática con el mundo visual y artístico. Godino, Batanero y Font (2007) afirman que el conocimiento matemático cobra sentido cuando el estudiante puede relacionarlo con contextos significativos, y la irregularidad ofrece precisamente esa conexión entre la teoría y la experiencia.

Una práctica formativa efectiva consiste en invitar a los estudiantes a construir polígonos regulares con GeoGebra y luego alterar uno de sus vértices. Observar (figura 9 a ,9b) cómo cambian los ángulos y el perímetro, y discutir qué propiedades se mantienen, permite descubrir que la geometría es un sistema de relaciones más que de figuras perfectas.

Figura 9.
Variación de ángulos y perímetros al modificar un vértice de un triángulo construido en GeoGebra



Nota: Elaboración propia.

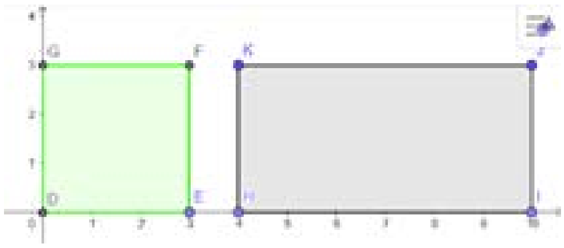
En esta experiencia, el error se convierte en recurso cognitivo, una idea desarrollada por Brousseau (2002), quien plantea que el aprendizaje surge de los conflictos entre las representaciones previas y las nuevas experiencias.

La clasificación como razonamiento relacional

Clasificar polígonos implica mucho más que nombrar figuras o agruparlas por su número de lados. Supone establecer relaciones lógicas, reconocer invariantes y construir redes de propiedades que revelan la estructura del conocimiento geométrico. Desde esta perspectiva, la clasificación deja de ser un ejercicio de memorización para convertirse en una forma de razonamiento que conecta la observación con la deducción.

De acuerdo con De Villiers (2010), clasificar figuras requiere desarrollar la capacidad de argumentar sobre las relaciones entre conceptos, más que limitarse a repetir definiciones. Cuando un estudiante comprende que “todo cuadrado es un rectángulo, pero no todo rectángulo es un cuadrado”, está elaborando una jerarquía conceptual, identificando condiciones necesarias y suficientes que permiten distinguir y generalizar. Este tipo de razonamiento no solo amplía la comprensión geométrica, sino que fortalece la estructura del pensamiento lógico.

Figura 10.
Relación jerárquica entre cuadrado y rectángulo mediante comparación de propiedades geométricas

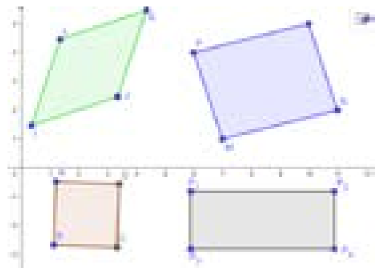


Nota: Elaboración propia.

En la escuela, esta comprensión suele enfrentarse a una enseñanza que privilegia la descripción visual por encima de la argumentación. Sin embargo, como señala Duval (2017), el pensamiento geométrico no se reduce a ver, sino a coordinar diferentes registros semióticos: el gráfico, el verbal y el simbólico.

Apoyo didáctico: El aula, entonces, debe transformarse en un espacio donde clasificar signifique pensar, comparar, conjeturar y justificar. Brousseau (2002) considera que las situaciones de clasificación constituyen un tipo de “situación didáctica fundamental”, porque permiten al alumno enfrentarse a la necesidad de explicar sus propias decisiones. En esta dinámica, el docente deja de ser quien impone categorías y pasa a ser un mediador del razonamiento.

Figura 11.
Comparación de cuadriláteros para analizar límites conceptuales entre clases de figuras



Nota: Elaboración propia.

Una secuencia didáctica puede iniciar con la comparación de figuras que comparten propiedades y continuar con la discusión sobre los límites entre una clase y otra. En este proceso, el estudiante aprende a revisar sus propias clasificaciones, a redefinir criterios y a argumentar desde la estructura y no desde la apariencia. Según Van Hiele (1986), este tránsito constituye el paso del pensamiento visual al pensamiento relacional, una de las etapas esenciales en la formación geométrica.

En el contexto de la didáctica contemporánea, Duval (2017) denomina a este proceso "pensamiento deductivo visual": la capacidad de razonar a partir de las propiedades estructurales de una figura, interpretando la imagen como soporte del razonamiento lógico. De este modo, la clasificación deja de ser un procedimiento estático y se convierte en una actividad cognitiva dinámica que promueve la generalización.

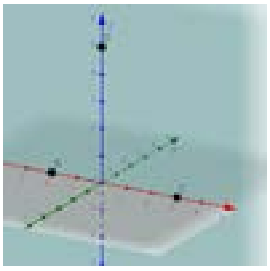
A su vez, Mariotti y Bussi (1998) sostienen que las tareas de clasificación son un escenario ideal para la mediación semiótica. A través del lenguaje, el gesto, el dibujo o el software de geometría dinámica, los estudiantes construyen significados compartidos sobre las propiedades de las figuras.

Presmeg (2020) añade que la clasificación también puede abordarse desde una dimensión estética y cultural. La manera en que el estudiante agrupa figuras, reconoce simetrías o establece relaciones de semejanza responde a una sensibilidad hacia el orden y la armonía. En este sentido, clasificar es también una forma de apreciar la geometría como lenguaje de la belleza, en la que la razón y la emoción se complementan.

Propiedades de triángulos y cuadriláteros

El triángulo constituye la figura geométrica fundamental a partir de la cual se derivan las propiedades del plano. En su aparente sencillez se sintetizan conceptos esenciales como la congruencia, la semejanza, la estabilidad y la proporcionalidad. Apostol (1991) explica que el triángulo es "la mínima configuración cerrada que permite definir un plano", pues con tres puntos no colineales se determina un espacio bidimensional. Esta característica le otorga un papel estructural en toda la geometría: cualquier polígono puede descomponerse en triángulos, y toda figura plana puede reconstruirse a partir de ellos.

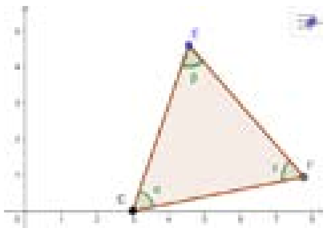
Figura 12.
Representación tridimensional de un triángulo para analizar su estructura geométrica básica



Nota: Elaboración propia.

Desde el punto de vista epistemológico, el triángulo también representa la puerta de entrada al razonamiento deductivo. Brousseau (2002) sostiene que, en el proceso de aprendizaje geométrico, las figuras no deben presentarse como objetos acabados, sino como situaciones problemáticas que el estudiante explora para descubrir regularidades. Cuando un alumno compara triángulos, mide sus ángulos, o intenta determinar la igualdad de sus lados, no solo aprende propiedades; desarrolla una forma de pensar en la que la observación se transforma en deducción.

Figura 13.
Triángulo con medición de ángulos para promover el razonamiento deductivo



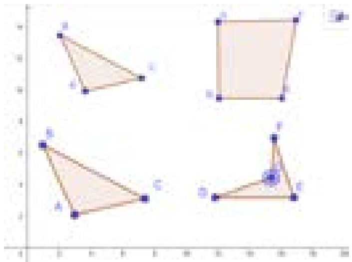
Nota: Elaboración propia.

Duval (2017) aporta una visión complementaria al analizar los registros semióticos implicados en la comprensión geométrica. Para este autor, la figura dibujada no es la geometría misma, sino un medio de representación que el sujeto debe interpretar. En el caso del triángulo, entender sus propiedades implica coordinar registros visuales, simbólicos y verbales: ver la forma, expresarla mediante letras y fórmulas, y describirla con argumentos lógicos.

Asimismo, Van Hiele (1986) identificó distintos niveles de razonamiento geométrico que resultan esenciales en la enseñanza del triángulo. En el nivel visual, el estudiante reconoce figuras por su apariencia; en el analítico, distingue sus partes y propiedades; y en el informal, establece relaciones entre figuras. El paso de un nivel a otro requiere mediación docente, experiencias manipulativas y un lenguaje cada vez más formal.

La noción de rigidez del triángulo constituye otra de sus propiedades centrales. Stewart (2016) señala que, a diferencia de otras figuras poligonales, un triángulo con lados fijos no puede deformarse sin alterar sus medidas.

Figura 14.
Construcciones articuladas para explorar la rigidez estructural en geometría



Nota: Elaboración propia.

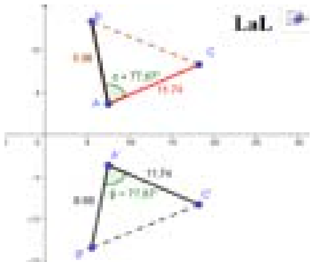
Este principio, que se aplica en ingeniería, arquitectura y robótica, puede explorarse en el aula mediante construcciones con varillas o entornos digitales como GeoGebra.

A través de la experiencia, los estudiantes comprueban que tres lados determinan una figura única, comprendiendo empíricamente el fundamento de la congruencia.

Relaciones de congruencia, semejanza y proporcionalidad

Las propiedades de los triángulos no se reducen a la suma de sus ángulos interiores o a la igualdad de sus lados; su verdadero valor didáctico reside en las relaciones que permiten establecer entre figuras. De Villiers (2010) argumenta que la congruencia y la semejanza no son simples criterios de comparación, sino medios para introducir a los estudiantes en el razonamiento lógico.

Figura 15.
Triángulos congruentes mediante el criterio Lado-Ángulo-Lado (LaL)



Nota: Elaboración propia.

La congruencia (Figura 15) se basa en la igualdad exacta de lados y, mientras que la semejanza exige comprender la proporcionalidad entre dimensiones, anticipando la noción de función.

Mariotti y Bussi (1998) destacan la importancia de la mediación semiótica en la enseñanza de estas propiedades. La tecnología, al ofrecer representaciones dinámicas, facilita que el estudiante observe cómo varían las figuras y reconozca qué elementos permanecen invariantes.

Por ejemplo, al modificar un triángulo en un entorno digital y conservar los ángulos, los alumnos descubren que las proporciones entre los lados se mantienen. Este tipo de tareas, según Moreno-Armella y Sriraman (2005), convierte la abstracción matemática en una experiencia perceptible y manipulable.

Godino, Batanero y Font (2007) proponen interpretar estas relaciones dentro de un enfoque onto-semiótico, que entiende la actividad matemática como una práctica cultural en la que interactúan objetos, significados y argumentos.

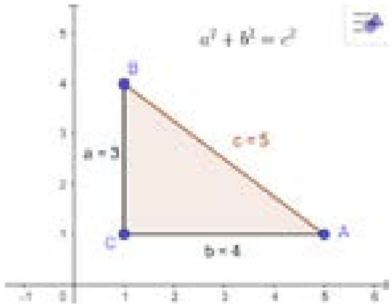
Desde esta perspectiva, el estudio de la congruencia o semejanza no consiste solo en aplicar fórmulas, sino en analizar los significados que los estudiantes atribuyen a los objetos geométricos. Así, un triángulo deja de ser una figura estática y se convierte en un sistema de relaciones que cobra sentido en la resolución de problemas reales.

Apoyo didáctico: En términos pedagógicos, el tratamiento de la semejanza puede orientarse hacia la resolución de situaciones de proporcionalidad. Por ejemplo, cuando los estudiantes miden la altura de un árbol mediante su sombra, aplican intuitivamente la igualdad de razones. Tall (2014) sugiere que este tipo de experiencias vincula los “tres mundos del pensamiento matemático”: el corporal (la acción y la percepción), el simbólico (las operaciones y el lenguaje) y el formal (las definiciones y demostraciones). Esta integración es la que permite comprender la matemática como una construcción coherente y no como un conjunto de reglas aisladas.

El triángulo rectángulo, en particular, representa una síntesis de todas estas relaciones. En él se aplican los teoremas de Pitágoras y de las razones trigonométricas, que expresan vínculos invariantes entre lados y ángulos.

Su estudio introduce al alumno en la idea de función trigonométrica, donde la variación de un ángulo produce una razón constante entre lados, un concepto que anticipa la comprensión de la continuidad y el cambio en el cálculo diferencial (Apostol, 1991; Stewart, 2016).

Figura 16.
Triángulo rectángulo y aplicación del teorema de Pitágoras



Nota: Elaboración propia.

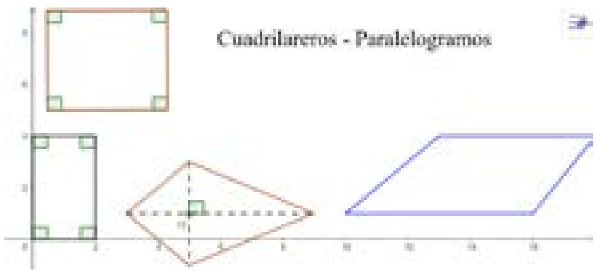
La diversidad estructural de los cuadriláteros

El estudio de los cuadriláteros constituye un punto de inflexión en la comprensión geométrica, porque exige superar la percepción visual de las formas y centrarse en las relaciones estructurales que las definen. A diferencia de los triángulos, en los cuadriláteros intervienen simultáneamente propiedades de paralelismo, igualdad, perpendicularidad y simetría, lo que requiere una coordinación entre registros gráficos, numéricos y verbales.

Desde una clasificación geométrica elemental, los cuadriláteros pueden dividirse en dos grandes grupos: paralelogramos y no paralelogramos. Los primeros se caracterizan por tener pares de lados opuestos paralelos, lo que les otorga propiedades específicas de simetría y congruencia.

Dentro de ellos se distinguen el **cuadrado**, el **rectángulo**, el **rombo** y el **romboide**.

Figura 17.
Paralelogramos: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide



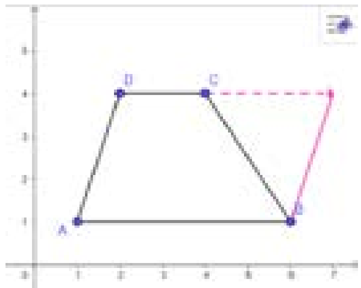
Nota: Elaboración propia.

El cuadrado posee cuatro lados iguales y ángulos rectos, representando la máxima regularidad dentro del grupo. El rectángulo mantiene los ángulos rectos, pero con lados opuestos iguales, mientras que el rombo conserva la igualdad de lados, aunque sin perpendicularidad entre ellos. Por su parte, el romboide presenta solo el paralelismo y la igualdad de lados opuestos, sin ángulos rectos ni diagonales iguales.

Apoyo didáctico: Una experiencia formativa puede comenzar con la construcción de un romboide en GeoGebra, para analizar las relaciones entre sus diagonales. El docente plantea el reto: "¿Se cortan las diagonales del romboide en su punto medio?". Los estudiantes dibujan el cuadrilátero, trazan las diagonales y observan la intersección. Al medir los segmentos resultantes, descubren que las diagonales sí se bisecan, aunque no son iguales ni perpendiculares. Este hallazgo los conduce a reflexionar sobre la estructura del paralelogramo y a reconocer que el paralelismo de los lados es la propiedad que garantiza la bisección, no la igualdad de los lados ni los ángulos.

Otro estudio significativo consiste en explorar los límites entre las clases de cuadriláteros. En GeoGebra, los estudiantes construyen un trapecio ABCD y analizan qué ocurre cuando el segundo par de lados se aproxima al paralelismo.

Figura 18.
Transformación de un trapecio en un paralelogramo mediante el ajuste de vértices



Nota: Elaboración propia.

Al modificar los vértices, observan que la figura se transforma gradualmente en un paralelogramo, es decir, pasa de tener un solo par de lados paralelos a tener dos.

Esta actividad les permite comprender que el paralelismo no depende de la apariencia visual, sino de una relación geométrica precisa entre rectas, que puede verificarse mediante la igualdad de pendientes o la no intersección. La experiencia concreta, apoyada en herramientas dinámicas, facilita lo que Duval (2017) llama coordinación de registros: el estudiante pasa de la percepción visual (ver rectas "casi paralelas") al razonamiento simbólico (verificar pendientes iguales).

Al finalizar, el docente invita a comparar las propiedades del trapecio con las del romboide, preguntando: "¿Qué cambia y qué se conserva cuando una figura pasa de ser trapecio a ser paralelogramo?"

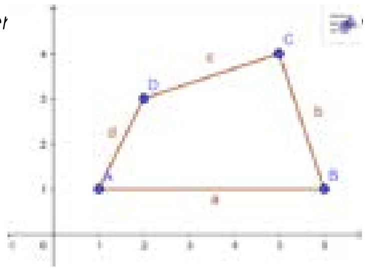
Este tipo de preguntas promueve el razonamiento relacional y ayuda al estudiante a reconocer que las figuras geométricas no son entidades aisladas, sino expresiones de un sistema de relaciones lógicas. Tal como afirma Van Hiele (1986), esta capacidad de deducir propiedades unas a partir de otras constituyen una de las etapas esenciales del pensamiento geométrico avanzado.

Los no paralelogramos, en cambio, no presentan ambos pares de lados paralelos. El trapecio constituye el caso más representativo, pues tiene solo un par de lados paralelos; puede ser isósceles si los lados no paralelos son iguales, rectángulo si posee un ángulo de 90°, o escaleno si todos sus lados y ángulos son diferentes.

Finalmente, el trapezoide carece totalmente de paralelismo, siendo el tipo más general y menos regular dentro de la categoría.

Esta clasificación, más que una lista de rasgos, debe concebirse como una red jerárquica de relaciones, ya que un cuadrado es simultáneamente rectángulo y rombo, y ambos son subcasos de un paralelogramo.

Figura 19.
Ejemplo de cuadriláter ... álisis de sus lados



Nota: Elaboración propia.

De esta forma, la enseñanza debe guiar al estudiante a descubrir vínculos entre propiedades y no solo a reconocer formas, favoreciendo el tránsito hacia un pensamiento relacional (Van Hiele, 1986).

Cálculo de perímetros y áreas de figuras planas

El concepto de medida constituye uno de los pilares del pensamiento matemático y una de las ideas más antiguas que la humanidad desarrolló para comprender y transformar el mundo. Desde las primeras civilizaciones, medir fue una necesidad práctica y simbólica: los egipcios medían la tierra tras las crecidas del Nilo, los babilonios dividían el círculo en 360 grados, y los griegos construyeron un sistema deductivo a partir de esas prácticas. Para Apostol (1991), el cálculo geométrico no es solo una técnica, sino una forma de razonar sobre las relaciones que existen entre la magnitud, la forma y la proporción.

El perímetro y el área emergen como expresiones distintas de una misma idea: la cuantificación del espacio.

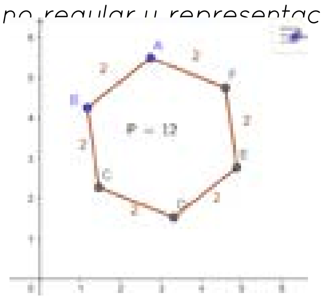
El perímetro remite a la longitud de un contorno, una magnitud unidimensional que recorre los límites de la figura; el área, en cambio, cuantifica la extensión bidimensional que esa frontera encierra. Aunque suelen enseñarse como nociones básicas, su comprensión profunda implica reconocer la diferencia entre medir un objeto y comprender su estructura. Brousseau (2002) advierte que la enseñanza tradicional de la medida ha tendido a privilegiar el cálculo sobre el significado, dejando al estudiante sin una comprensión conceptual de lo que se mide.

El perímetro: entre la longitud y la forma

El concepto de perímetro parece simple, pero encierra una notable riqueza conceptual. Definirlo como "la suma de los lados" es insuficiente, pues reduce su sentido geométrico a una operación aritmética.

Figura 20.

Perímetro de un hexágono regular y representación de la suma de sus lados



Nota: Elaboración propia.

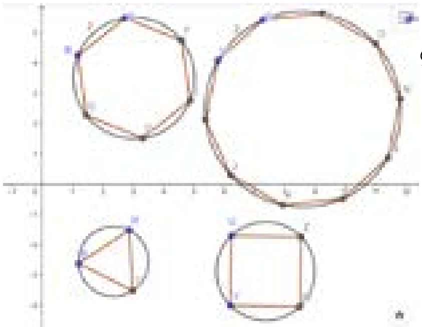
En realidad, el perímetro expresa la idea de recorrido, de borde, de límite. En un hexágono regular de lado a, decir que su perímetro es 6a significa que, si desplegáramos sus lados en una línea, esa longitud equivaldría al contorno total de la figura.

Van Hiele (1986) explica que en los niveles iniciales del razonamiento geométrico, los estudiantes suelen confundir perímetro con área porque ambos se asocian a la "grandeza" de la figura. No es raro que crean que una figura más grande tiene necesariamente mayor perímetro. Superar esa confusión requiere experiencias que permitan distinguir longitud de extensión.

Apoyo didáctico: Brousseau (2002) propone diseñar situaciones didácticas que permitan al estudiante construir el concepto de perímetro a partir de la acción. Medir con una cuerda el contorno de un jardín, rodear figuras con un hilo o calcular el recorrido de una pista son ejemplos de tareas que articulan la experiencia corporal con la abstracción simbólica. El aprendizaje de la medida del perímetro no se limita a obtener un número; implica comprender la relación entre el objeto y su representación métrica.

Duval (1999) añade que el perímetro puede entenderse como una forma de representación discursiva del espacio: al medirlo, se está traduciendo una figura visual a un conjunto de símbolos lineales.

Figura 21.
Aproximación polig guras circulares



Nota: Elaboración propia.

Este proceso requiere interiorizar la idea de continuidad, pues el perímetro de una curva se define mediante una suma infinita de segmentos infinitesimales. Aquí se insinúa ya la conexión con el cálculo diferencial, donde la longitud de una curva se determina mediante una integral. Apostol (1991) subraya que esta transición histórica del perímetro rectilíneo al curvilíneo marcó el nacimiento del análisis matemático moderno.

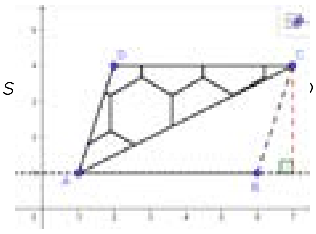
En la enseñanza, la comprensión del perímetro se fortalece cuando se integra con la geometría dinámica. Moreno-Armella y Sriraman (2005) muestran que el uso de programas como GeoGebra permite a los estudiantes modificar figuras y observar cómo varía su perímetro. Al mover un vértice de un polígono y ver cómo el valor del perímetro cambia, el alumno comprende que la medida no es un número fijo, sino una propiedad dependiente de la forma.

El área: de la intuición al razonamiento formal

El concepto de área representa un salto cognitivo mayor que el de perímetro. Medir un contorno es recorrer; medir un área es comparar una extensión bidimensional con una unidad de referencia. Duval (2017) afirma que esta transición exige un cambio de registro: el estudiante debe pasar del dominio lineal al superficial, del pensamiento unidimensional al bidimensional. Sin ese cambio cognitivo, el área se convierte en una simple multiplicación de números sin sentido.

Históricamente, la noción de área se construyó a partir de la equivalencia y la descomposición. Los griegos, según Stewart (2016), definieron el área de un paralelogramo mediante la equivalencia con un rectángulo, y la del triángulo como la mitad de la del paralelogramo de igual base y altura. Estas definiciones expresan una idea profunda: medir una superficie es transformarla en otra equivalente cuya medida se conoce.

Figura 22.
Descomposición y trans *no para justificar el cálculo de área*



Nota: Elaboración propia.

Godino, Batanero y Font (2007) destacan que el área no es solo una cantidad física, sino un objeto de significado. Desde el enfoque onto-semiótico, su comprensión depende de las prácticas institucionales en las que se usa: medir, calcular, representar o justificar. Por eso, el área de un triángulo o un círculo no debe enseñarse como una fórmula aislada, sino como el resultado de una serie de prácticas que tienen sentido en contextos culturales (arquitectura, agrimensura, diseño, arte).

Presmeg (2020) propone considerar también la dimensión semiótica y cultural de las figuras. Medir un área implica reconocer la figura como un símbolo de orden y armonía, no solo como un espacio físico. En este sentido, enseñar el área puede vincularse con la estética, con la idea de que el número y la forma expresan proporciones que el ser humano percibe como belleza.

El cálculo de áreas de figuras planas se fundamenta en tres ideas: la equivalencia, la composición-descomposición y la transformación. El área de un triángulo puede deducirse a partir del rectángulo; la de un polígono regular, a partir del triángulo isósceles central; y la del círculo, mediante la aproximación poligonal.

Comprender el área y el perímetro implica reconocer que medir es una forma de abstraer. En el nivel empírico, se mide con una regla o una cuadrícula; en el nivel analítico, se mide con una ecuación o una integral. Apostol (1991) y Tall (2014) coinciden en que esta evolución refleja la historia misma de la matemática: del número concreto al número continuo, de la suma de longitudes a la noción de límite.

La circunferencia y el círculo

Desde la antigüedad, medir el círculo fue un desafío. Los egipcios y los babilonios conocían aproximaciones empíricas para calcular su perímetro; los griegos, en cambio, buscaron una explicación racional. Arquímedes fue el primero en demostrar que el área de un círculo es igual a la de un triángulo rectángulo cuyo cateto base es la longitud de su circunferencia y cuya altura es el radio. Esta deducción, según Stewart (2016), anticipa el concepto moderno de integral: una suma infinita de elementos infinitesimales.

El círculo, como figura perfecta, desafió a los matemáticos porque su medida exigía la introducción de un número irracional: π. Apostol (1991) explica que π no es solo una constante geométrica, sino un número que encarna la idea de límite, pues surge de la relación entre la longitud de una curva y su diámetro. En este sentido, el círculo se convierte en el punto de encuentro entre la geometría y el análisis, entre la intuición visual y la abstracción simbólica.

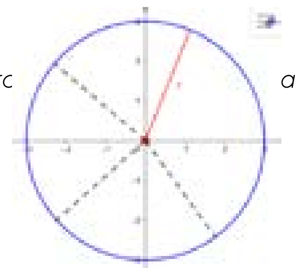
Tall (2014) sostiene que el círculo es una figura privilegiada para explorar los tres mundos del pensamiento matemático. En el mundo corporal, el estudiante lo percibe como un objeto perfecto; en el simbólico, lo representa mediante ecuaciones como $\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{r}^2$; y en el formal, razona sobre sus propiedades y deduce teoremas. Este tránsito entre mundos no es lineal: requiere mediación, reflexión y múltiples experiencias sensoriales y conceptuales.

La circunferencia: frontera y medida

La circunferencia puede definirse como el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. Esta definición algebraica encierra una profundidad geométrica y filosófica. Es la figura que expresa el equilibrio entre constancia y cambio: todos sus puntos son distintos, pero guardan una relación invariable con el centro.

Figura 23.

Representación de la circ ar geométrico de puntos equidistantes del centro



Nota: Elaboración propia.

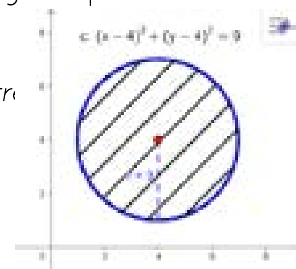
Van Hiele (1986) señala que este tipo de invariancia es fundamental en el desarrollo del pensamiento geométrico, pues permite comprender que una figura puede transformarse sin perder su esencia.

Desde el punto de vista de la medida, la longitud de la circunferencia representa uno de los primeros casos donde la intuición choca con la exactitud matemática. No puede medirse con regla ni con compás; requiere una aproximación progresiva mediante polígonos inscritos o circunscritos, tal como demostró Arquímedes. Brousseau (2002) interpreta este proceso como una situación de aprendizaje por reconstrucción, en la que el alumno experimenta la necesidad de un nuevo tipo de número y de método para medir lo que no puede contarse directamente.

Moreno-Armella y Sriraman (2005) destacan que los entornos digitales han abierto nuevas posibilidades para explorar la circunferencia como objeto dinámico. En programas como GeoGebra, el estudiante puede variar el radio y observar en tiempo real cómo cambia el perímetro, comprendiendo de manera empírica la proporcionalidad directa entre ambos. El círculo: interior, superficie y continuidad.

El círculo representa, a diferencia de la circunferencia, la totalidad de los puntos que se encuentran dentro de un radio fijo desde el centro. Es, por tanto, una figura de extensión, no de borde. La circunferencia es la línea cerrada que delimita al círculo, mientras que el círculo es la región que dicha línea encierra.

Figura 24.
Diferencia conceptual entr... lo como límite y superficie

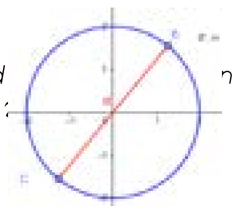


Nota: Elaboración propia.

Sin embargo, en la experiencia escolar, los estudiantes tienden a confundir ambas figuras. Duval (1999) señala que esta confusión se debe a una falta de diferenciación entre el registro perceptivo y el conceptual: se "ve" la circunferencia, pero se "piensa" el círculo. Enseñar a distinguir ambas requiere experiencias en las que el estudiante manipule objetos físicos y observe la diferencia entre recorrer un límite y cubrir una superficie.

El área del círculo se relaciona con su perímetro de una manera que fascina tanto a la mente como a la vista. La fórmula $A = \pi r^2$ expresa la proporcionalidad cuadrática entre el radio y la superficie, y su deducción implica la idea de límite.

Figura 25.
Relación entre la longitud ...ncia y el diámetro en la definición geométrica de ...



Nota: Elaboración propia.

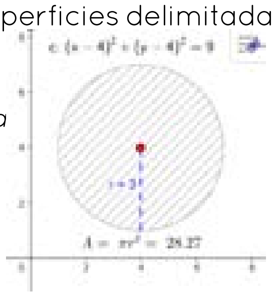
El número ϖ es quizá la constante más emblemática de la matemática. Su aparición en la medida del círculo revela el vínculo entre lo geométrico y lo analítico.

Apostol (1991) lo define como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, una relación que permanece constante sin importar el tamaño del círculo. Sin embargo, su valor exacto no puede expresarse mediante una fracción: es irracional, infinito y no periódico.

Stewart (2016) subraya que ϖ simboliza el paso de la medida empírica al razonamiento abstracto. Para medir un círculo no basta con trazarlo; hay que representarlo simbólicamente. De allí que ϖ se convierta en un punto de encuentro entre la geometría y la filosofía: mide lo que no puede medirse directamente, y en esa paradoja reside su poder formativo.

Cuando se calcula el área de un círculo mediante la fórmula $\mathbf{A = \pi r^2}$, se está aplicando una idea que supera la percepción directa. El estudiante no puede medir físicamente esa superficie, pero puede representarla simbólicamente. Este salto del mundo visual al simbólico es el núcleo del pensamiento matemático superior. Stewart (2016) subraya que el cálculo integral generaliza la idea de área al considerar superficies delimitadas por curvas arbitrarias.

Figura 26.
Representación simbólica



Nota: Elaboración propia.

Así, el área deja de ser solo una magnitud geométrica para convertirse en un modelo del cambio continuo. Comprender esta transición ayuda al estudiante a concebir la geometría y el cálculo no como disciplinas separadas, sino como dimensiones de un mismo razonamiento.

Desde el punto de vista cognitivo, el círculo es una figura ideal para enseñar la noción de continuidad. Tall (2014) argumenta que la transición del círculo tangible al círculo analítico, es decir, de la figura dibujada a la ecuación $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$, ilustra el paso del pensamiento geométrico concreto al abstracto. Cuando el estudiante comprende que todos los puntos que satisfacen esa ecuación forman una misma figura, su razonamiento alcanza un nivel formal de generalización.

Presmeg (2020) añade una dimensión semiótica y cultural al estudio del círculo. En muchas culturas, el círculo simboliza el ciclo de la vida, el tiempo o la totalidad. Integrar estas interpretaciones en la enseñanza no significa abandonar el rigor matemático, sino reconocer la dimensión humana del conocimiento geométrico. La forma perfecta no solo se calcula: también se interpreta y se siente.

Propiedades métricas del círculo: arcos, cuerdas, sectores y segmentos

El estudio del círculo trasciende la simple contemplación de una forma perfecta. Su riqueza geométrica reside en la red de relaciones métricas que lo habitan: los arcos, las cuerdas, los sectores y los segmentos. Cada uno de estos elementos revela una manera distinta de medir y comprender el espacio curvo. Apostol (1991) señala que el paso del razonamiento sobre rectas y triángulos a la medida de curvas y áreas circulares marcó un punto de inflexión en la historia de la matemática: obligó a pensar la medida como una sucesión infinita de aproximaciones.

En la geometría escolar, estos elementos constituyen un puente entre el pensamiento euclidiano y el pensamiento analítico. Mientras el estudiante mide longitudes y ángulos, se enfrenta a la necesidad de cuantificar lo que no es lineal. En este sentido, los arcos y las cuerdas introducen el problema de la curvatura, y los sectores y segmentos, el de la subdivisión del área.

El círculo, con su estructura simétrica, permite abordar la geometría como un sistema de relaciones armónicas. Van Hiele (1986) sostiene que la madurez geométrica se alcanza cuando el estudiante puede reconocer las propiedades invariantes de las figuras y deducir unas a partir de otras. En el caso del círculo, esa invariancia se manifiesta en la relación constante entre el radio y la longitud de cualquier arco, o en la proporcionalidad entre el ángulo central y el área del sector. Estas conexiones, más que fórmulas, son expresiones de un pensamiento relacional.

El arco de circunferencia representa la porción del borde circular comprendida entre dos puntos, mientras que la cuerda es el segmento que los une directamente. Aunque ambos comparten los mismos extremos, su naturaleza métrica es distinta: el arco pertenece al mundo curvo, la cuerda al mundo rectilíneo.

Figura 27.

Aproximación de la longitu[illegible]ediante el uso de cuerdas

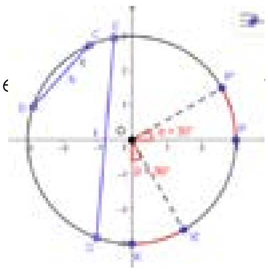
Nota: Elaboración propia.

Stewart (2016) explica que comprender la relación entre ambas es clave para desarrollar una visión analítica del círculo, pues en esa relación se condensa la idea de aproximación.

Si el arco se hace cada vez más pequeño, su longitud tiende a la de la cuerda. Este fenómeno introduce intuitivamente el concepto de límite. Apostol (1991) lo utiliza para explicar cómo la longitud de una curva puede definirse como el límite de las longitudes de los segmentos que la aproximan. Así, el estudio de los arcos y las cuerdas prepara el terreno para el razonamiento infinitesimal.

Apoyo didáctico: Desde el punto de vista didáctico, Brousseau (2002) recomienda diseñar situaciones donde el estudiante descubra por sí mismo las relaciones entre ángulos, arcos y cuerdas. Por ejemplo, al explorar con compás y regla, puede observar que los arcos subtendidos por un mismo ángulo central son congruentes, o que la cuerda es mayor cuanto más próximo se encuentra su arco al diámetro. Estas experiencias empíricas activan el proceso de abstracción progresiva que Van Hiele describe como esencial para avanzar hacia el razonamiento formal.

Figura 28.
Relaciones entre arco, cue l como base para la abstracción progresiva



Nota: Elaboración propia.

Duval (2017) advierte, sin embargo, que el razonamiento sobre curvas exige una conversión semiótica compleja: el estudiante debe traducir lo que ve (la forma curvada) a un discurso simbólico (una relación trigonométrica). En este sentido, los entornos digitales se convierten en aliados poderosos. Moreno-Armella y Sriraman (2005) demostraron que, al manipular arcos y cuerdas en GeoGebra, los alumnos pueden observar visualmente cómo varía la longitud del arco en función del ángulo central, interiorizando la proporcionalidad $\mathbf{L} = \mathbf{r}\theta$ cuando el ángulo se mide en radianes. La visualización deja de ser un apoyo y se transforma en una forma de pensamiento.

El círculo también puede descomponerse en partes delimitadas por radios y cuerdas. El sector circular es la región comprendida entre dos radios y el arco que los une; el segmento circular, la comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente. Ambos permiten abordar el área del círculo no como una totalidad, sino como una suma de part ... la idea de integración.

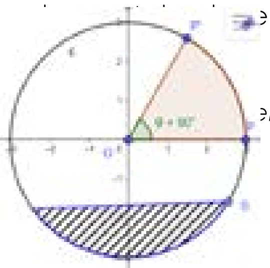


Figura 29.
Descomposición del círcu... ...ento circular para introducir la idea de integraci...

Nota: Elaboración propia.

Apostol (1991) muestra que el área del sector circular es proporcional al ángulo central, y puede expresarse como:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)\pi \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{r}^2\theta}{2} \text{ si el ángulo se mide en radianes.}$$

Esta relación, aparentemente simple, encierra una comprensión profunda: la idea de que toda medida es una comparación entre una parte y el todo. Stewart (2016) sugiere que esta proporcionalidad ofrece un ejemplo accesible del pensamiento funcional, pues el área del sector depende linealmente del ángulo, mientras que la del círculo completo constituye el caso máximo.

El segmento circular, por su parte, representa una región más compleja, cuyo cálculo combina el área del sector con la del triángulo isósceles forn... ...s y la cuerda.

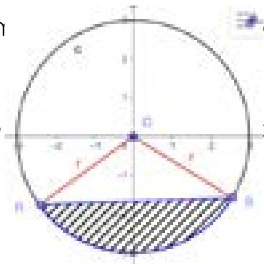


Figura 30.
Representación del segm... ...combinación del sector y el triángulo isósceles

Nota: Elaboración propia.

Este tipo de problemas exige al estudiante integrar diferentes conocimientos geométricos, como la trigonometría y la descomposición de figuras.

Duval (1999) afirma que el aprendizaje significativo se logra cuando el alumno no solo aplica fórmulas, sino que comprende cómo los distintos registros se relacionan para describir un mismo fenómeno.

Aplicaciones de cálculo de áreas y perímetros

El cálculo de áreas y perímetros trasciende su carácter instrumental para convertirse en una herramienta de comprensión del espacio, de análisis estructural y de razonamiento matemático. Lejos de constituir un conjunto de fórmulas que el estudiante debe memorizar, representa un campo de aplicación donde confluyen la medida, la proporcionalidad y la modelación. Esta dimensión aplicada, cuando se enseña de forma crítica, fomenta la capacidad de transferir el conocimiento matemático a contextos sociales, científicos y tecnológicos, cumpliendo así una función formativa integral.

Desde la perspectiva de Duval (2017), comprender una medida implica coordinar registros de representación que van desde lo perceptivo hasta lo simbólico. Por ello, al calcular el área de una superficie o el perímetro de un contorno, el estudiante no solo realiza operaciones numéricas, sino que también interpreta gráficamente, compara magnitudes y comunica relaciones. El cálculo geométrico se transforma entonces en una práctica de pensamiento: un proceso de modelación en el que el sujeto construye significado y no simplemente ejecuta reglas.

En este sentido, el docente debe proporcionar tanto herramientas teóricas como ejercicios prácticos que promuevan el razonamiento, la modelación y la resolución de problemas contextualizados.

El desarrollo del pensamiento geométrico no depende solo del conocimiento de fórmulas, sino de la calidad y diversidad de las tareas que el estudiante enfrenta. Cada tipo de ejercicio sobre áreas y perímetros refleja una concepción particular del aprendizaje matemático: algunos se centran en la memorización de reglas, otros en la exploración, la argumentación o la modelación. Según Brousseau (2002), las situaciones didácticas deben organizarse de modo que el conocimiento emerja del conflicto cognitivo y no de la repetición mecánica. De igual manera, Duval (2017) recuerda que comprender la geometría implica articular distintos registros de representación tales como: figural, simbólico, numérico y verbal para generar sentido.

La tipología que se presenta a continuación amplía la visión tradicional de los ejercicios, fundamentando cada tipo desde diversas perspectivas teóricas y mostrando ejemplos que reflejan su potencial formativo.

Tabla 1.
Fórmulas fundamentales de perímetro y área en figuras planas

Figura	Perímetro (P)	Área (A)	Comentario conceptual
Cuadrado	$P = 4a$	$A = a^2$	El lado es la unidad generadora de toda la figura; su área expresa la noción de "magnitud cuadrada".
Rectángulo	$P = 2(a + b)$	$A = a \times b$	Expresa la relación producto entre dos dimensiones ortogonales.
Triángulo	$P = a + b + c$	$A = \frac{b \times h}{2}$	Permite visualizar la mitad de un paralelogramo como modelo.
Rombo	$P = 4a$	$A = \frac{D \times d}{2}$	Las diagonales son ejes de simetría que determinan el área.
Paralelogramo	$P = 2(a + b)$	$A = b \times h$	Equivalente en área al rectángulo de igual base y altura.
Trapecio	$P = a + b + c + d$	$A = \frac{(B+b)h}{2}$	El área resulta del promedio de las bases multiplicado por la altura.
Polígono regular (n lados)	$P = n \times a$	$A = \frac{P \times ap}{2}$	La fórmula generaliza la estructura de los polígonos simétricos.
Círculo	$P = 2\pi r$	$A = \pi r^2$	Representa el límite de los polígonos regulares al tender ($n \to \infty$).

Sector circular	$P = 2r + \frac{\pi r \theta}{180}$	$A = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$	Mide la proporción del círculo delimitada por un ángulo central.

Nota. La tabla sintetiza relaciones métricas esenciales en figuras geométricas básicas, destacando cómo cada expresión revela una estructura conceptual distinta del espacio y de la medida. Elaboración propia.

1. Ejercicios de aplicación directa de fórmulas

Estos ejercicios constituyen el punto de partida para el dominio instrumental. Buscan que el estudiante reconozca las dimensiones relevantes y aplique correctamente las expresiones algebraicas. Aunque son de naturaleza reproductiva, tienen un valor introductorio cuando se acompañan de explicaciones gráficas y justificaciones verbales.

Según Brousseau (2002), las tareas directas deben enmarcarse en situaciones didácticas intencionadas que no se reduzcan a la mecanización, sino que permitan comprender la relación entre la figura, la medida y la fórmula. Tall (2014) añade que en este nivel los estudiantes transitan del mundo encarnado (visual) al mundo simbólico (algebraico), integrando la observación y la manipulación con la simbolización matemática.

Tabla 2.

Ejercicios introductorios de perímetro y área en figuras planas

Calcular el área de un triángulo de base 15 cm y altura 10 cm.	$A = \frac{\mathbf{b \times h}}{2} = \frac{15 \times 10}{2} = 75cm^2$
Hallar el perímetro de un círculo de radio 7 cm.	$P = 2\pi r = 2\pi(7) = 43.98cm$
Calcular el área de un paralelogramo con base 8 m y altura 5 m.	$P = 2\pi r = 2\pi(7) = 43.98cm$
Determinar el área de un trapecio cuyas bases miden 10 y 6 m, y su altura 4 m.	$A = b \times h = 8 \times 5 = 40m^2$

Nota. Los ejercicios ilustran cómo la aplicación directa de fórmulas se vuelve significativa cuando el estudiante comprende la relación entre la representación geométrica y el modelo algebraico. Elaboración propia.

2. Ejercicios de descomposición y recomposición de figuras

Este tipo de tareas promueve la visualización y la capacidad analítica. El estudiante aprende a reconocer que una figura compleja puede dividirse en polígonos más simples o combinarse con otras para formar nuevas configuraciones equivalentes.

De Villiers (2010) argumenta que este tipo de ejercicios activa la función descubridora del razonamiento geométrico, porque el alumno infiere relaciones entre las partes. Duval (2017) añade que estas tareas facilitan la conversión entre registros semióticos, lo que estimula la abstracción geométrica.

Finalidad: Fomentar la capacidad de descomponer, abstraer y reconstruir, desarrollando la visión estructural de las figuras geométricas (Godino, Batanero y Font, 2007).

Tabla 3.
Ejercicios de composición y descomposición de áreas para el desarrollo del razonamiento geométrico

Calcular el área de una figura formada por un rectángulo de 10 m × 6 m y un triángulo isósceles adyacente con base 10 m y altura 4 m.	$\mathrm{A} = (10 \times 6) + \frac{10\times4}{2} = 60 + 20 = 80\mathrm{m}^2$
Determinar el área sombreada al restar de un cuadrado de 12 cm de lado un círculo inscrito.	$\mathrm{A} = 12^2 - \pi(6)^2 = 144 - 113.1 = 30.9\mathrm{cm}^2$
Calcular el área de una figura compuesta por un semicírculo de radio 3 cm y un rectángulo de 6 cm × 4 cm.	$\mathrm{A} = (6 \times 4) + \frac{\pi(3)^2}{2} = 24 + 14.14 = 38.14\mathrm{cm}^2$
Dividir un hexágono regular en seis triángulos equiláteros y hallar el área total en función del lado.	$\mathrm{A} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{a}^2$

Nota. Los ejercicios presentados integran la visualización geométrica con el uso de representaciones simbólicas. Elaboración propia.

Finalidad: Fomentar la capacidad de descomponer, abstraer y reconstruir, desarrollando la visión estructural de las figuras geométricas (Godino, Batanero y Font, 2007).

3. Ejercicios de transformación y conservación

En estos ejercicios se analizan los efectos de las transformaciones geométricas (ampliaciones, reducciones, deformaciones) sobre el área y el perímetro. El objetivo es comprender las relaciones de proporcionalidad y covariación.

Moreno-Armella y Sriraman (2005) sostienen que las transformaciones permiten revelar la dialéctica entre forma y medida, favoreciendo una comprensión dinámica del espacio. Stewart (2016) complementa esta idea al señalar que los ejercicios de covariación preparan al estudiante para el razonamiento diferencial y la optimización.

Tabla 4.
Ejercicios de homotecia, perímetro y variación de áreas en figuras planas

Calcular el área y el perímetro de un rectángulo 4 × 6 y luego de uno homotético con razón 2.	$\mathbf{A_1 = 24m^2, P_1 = 20m}$ $\mathbf{A_2 = 96m^2, P_2 = 40m}$ El perímetro se duplica y el área se cuadruplica.
Comparar el área de dos figuras con el mismo perímetro:	Cuadrado de lado 6 m: $\mathrm{A = 36m^2}$ Rectángulo de lados 9 y 3: $\mathrm{A = 27m^2}$ El cuadrado maximiza el área.
Explorar la variación del área del círculo al duplicar su radio:	$\mathrm{A_1 = \pi r^2, A_2 = \pi (2r)^2 = 4A_1}$

Nota. Estos ejercicios muestran cómo los cambios de escala modifican el perímetro y el área, fortaleciendo la comprensión de relaciones geométricas fundamentales. . Elaboración propia.

Finalidad: Comprender las relaciones entre magnitudes y desarrollar pensamiento variacional (Tall, 2014).

4. Ejercicios de generalización algebraica

Estos ejercicios permiten derivar expresiones generales a partir de casos particulares, lo cual impulsa la capacidad de abstraer y formalizar. Mariotti y Bussi (1998) afirman que el aprendizaje geométrico implica la mediación semiótica: el estudiante traduce observaciones visuales en lenguaje algebraico. Duval (2017) explica que esta conversión simbólica constituye un salto cognitivo hacia la abstracción.

Tabla 5.
Problemas avanzados de generalización y representación funcional en geometría plana

Deduzca la fórmula del área de un polígono regular de n lados de longitud k y apotema R.	$\mathrm{A = \frac{nkR}{2}}$
Expresar el área de un cuadrado como función del perímetro.	$\mathrm{A = \left(\frac{P}{4}\right)^2}$
Mostrar que el área del círculo puede expresarse en función del perímetro:	$\mathrm{A = \frac{P^2}{4\pi}}$
Determinar una relación general entre el área y el número de lados de un polígono regular inscrito en un círculo de radio r.	$\mathrm{A = \frac{1}{2} nr^2 \, sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$

Nota. Los ejercicios integran proporcionalidad, perímetro y funciones trigonométricas para fortalecer la comprensión estructural del área en figuras regulares y en el círculo. Elaboración propia.

Finalidad: Favorecer la formalización, la simbolización y la capacidad de establecer patrones generales, base del pensamiento algebraico (Brousseau, 2002).

5. Ejercicios de modelación contextualizada

Estos ejercicios trasladan los conocimientos geométricos a situaciones del entorno real, fortaleciendo la comprensión funcional y la conciencia social del aprendizaje.

Presmeg (2020) subraya que la modelación otorga significado cultural a la matemática; al resolver problemas reales, el estudiante desarrolla una comprensión situada. Moreno-Armella y Sriraman (2005) añaden que el trabajo con contextos auténticos estimula la autonomía y la reflexión crítica.

Tabla 6.
Problemas aplicados de geometría en contextos reales y de estimación cuantitativa

Una pista de atletismo tiene forma de rectángulo con dos semicírculos de radio 30 m en los extremos. Calcular el perímetro y el área total.
Calcular el costo de colocar cerámica en una habitación de 5 m × 3 m si cada caja cubre 1.5 m y cuesta 12 USD.
Determinar el área de un terreno trapezoidal con bases 40 y 25 m, y altura 20 m, para estimar la cantidad de semillas a sembrar si cada hectárea requiere 250 kg.
Diseñar un vitral circular con diámetro de 2 m, calculando la cantidad de vidrio (en m) y el perímetro del marco metálico.

Nota. Las tareas integran modelación geométrica y razonamiento métrico para resolver situaciones auténticas de cálculo de áreas, perímetros y costos. Elaboración propia.

Finalidad: Desarrollar la transferencia del conocimiento y la conciencia de que la geometría es una herramienta para comprender y transformar el entorno (Presmeg, 2020).

6. Ejercicios de argumentación y demostración

En este nivel se busca razonar, justificar y probar propiedades geométricas. Este tipo de tarea promueve la comprensión profunda del sistema deductivo y la conexión entre observación, inferencia y demostración. De Villiers (2010) define la demostración como una actividad de descubrimiento y explicación que desarrolla la autonomía cognitiva. Tall (2014) y Duval (2017) coinciden en que la argumentación geométrica representa la culminación del aprendizaje, porque el estudiante logra articular los tres mundos del pensamiento: visual, simbólico y formal.

Tabla 7.
Tareas demostrativas para el desarrollo del razonamiento geométrico avanzado

Demostrar que el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo que comparte su base y altura.
Probar que entre todas las figuras con igual perímetro, el círculo encierra el área máxima.
Justificar que el área del rombo es igual al semiproducto de sus diagonales.
Argumentar que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo equivale al cuadrado sobre la hipotenusa (teorema de Pitágoras)

Nota. Las actividades promueven la argumentación deductiva y la comprensión profunda de propiedades geométricas fundamentales. Elaboración propia.

Finalidad: Desarrollar el razonamiento lógico, la capacidad de explicación y la metacognición geométrica (De Villiers, 2010; Brousseau, 2002).

Conclusiones

El capítulo sobre polígonos, áreas, circunferencia y círculo permitió comprender que la geometría no solo describe las formas del mundo, sino que enseña a pensar con precisión, orden y sensibilidad. A través del estudio de las figuras planas se aprendió que medir es también comparar, abstraer y razonar; cada perímetro calculado y cada superficie determinada son el resultado de una construcción mental que une la observación con la lógica. Esta relación entre forma y medida invita a concebir la geometría como un lenguaje del pensamiento y no como una lista de fórmulas, pues detrás de cada cálculo hay una idea de estructura, equilibrio y armonía.

El análisis de las propiedades de los polígonos y de las relaciones entre sus lados y ángulos permitió descubrir la coherencia interna del razonamiento geométrico. Comprender cómo una figura puede descomponerse, transformarse o conservar sus magnitudes abre al estudiante la posibilidad de reconocer patrones y regularidades en la naturaleza. En este proceso, el cálculo de áreas y perímetros deja de ser un fin para convertirse en un medio que desarrolla capacidades más amplias: visualizar, inferir, conjeturar y argumentar. De este modo, la enseñanza geométrica se vuelve una experiencia intelectual que conecta lo tangible con lo abstracto.

Finalmente, el estudio de la circunferencia y el círculo ofreció una síntesis entre la razón y la intuición, al mostrar cómo la perfección de las formas redondas traduce la búsqueda humana de proporción y movimiento. El aprendizaje de estos contenidos, cuando se vincula con la práctica y la exploración tecnológica, fomenta una comprensión viva de la medida, la equivalencia y la variación. La geometría se convierte así en una escuela del pensamiento, una disciplina que enseña a observar con rigor, a expresar con claridad y a descubrir la belleza que existe en la relación entre número, espacio y forma.

Referencias

Apostol, T. M. (1991). Calculus: one-variable calculus with an introduction to linear algebra (2.ª ed.). John Wiley & Sons.

Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2014). Mathematical modelling with digital technologies: The role of dynamic representations. Teaching Mathematics and Its Applications, 33(1), 1–10. https://doi.org/10.1093/teamat/hru002

Brousseau, G. (2002). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970–1990. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1972-8

De Villiers, M. (2010). Exploring the discovery function of proof in dynamic geometry. Pythagoras, 71(1), 9–19. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v0i71.6

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st PME Conference (pp. 3–26). PME.

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM – Mathematics Education, 39(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Mariotti, M. A., & Bartolini-Bussi, M. G. (1998). From drawing to construction: Teachers' mediation within the Cabri environment. In Proceedings of the 22nd PME Conference (Vol. 1, pp. 180–195). PME.

Moreno-Armella, L., & Sriraman, B. (2005). Technology and the dialectical nature of mathematical concepts: The case of dynamic geometry. ZDM – Mathematics Education, 37(5), 304–314. https://doi.org/10.1007/BF02655898

Presmeg, N. (2020). Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture. Springer.

Stewart, J. (2016). Calculus: Early transcendentals (8th ed.). Cengage Learning.

Tall, D. (2014). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Academic Press.

Capítulo III

Relaciones métricas en triángulos, poliedros, cuerpos de revolución y modelo de Van Hiele

Introducción

El estudio de la geometría adquiere un lugar fundamental en la formación matemática cuando se reconocen las relaciones internas que estructuran las figuras y los cuerpos del espacio. Comprender un triángulo, un poliedro o un sólido de revolución no se limita a identificarlos visualmente, sino a revelar las conexiones que existen entre sus elementos, sus medidas y las transformaciones que los caracterizan. Cada figura conserva una lógica interna que puede analizarse, compararse y generalizarse, y es en este proceso donde el razonamiento geométrico encuentra su verdadero sentido formativo.

A lo largo de este capítulo, se aborda la geometría desde una perspectiva que integra la observación, la medición y la deducción como partes de un mismo proceso de construcción del conocimiento. Las relaciones métricas permiten reconocer cómo se organizan los elementos de las figuras planas y

ISBN 978-9942-596-46-8 | 2025
https://editorial.risei.org

espaciales, cómo se mantienen o se modifican bajo distintas condiciones, y qué principios gobiernan su estructura. Al mismo tiempo, el estudio de los cuerpos tridimensionales abre la posibilidad de comprender el espacio en toda su profundidad, desde la interpretación de sus formas hasta el cálculo de áreas y volúmenes que aparecen con frecuencia en contextos reales y aplicados.

Finalmente, el capítulo incorpora un enfoque centrado en el desarrollo progresivo del razonamiento geométrico, reconociendo que los estudiantes avanzan por etapas diferenciadas que requieren propuestas didácticas cuidadosamente estructuradas. Este marco permite comprender por qué algunos conceptos resultan intuitivos mientras otros exigen mayor abstracción, y orienta la enseñanza hacia experiencias que favorezcan un pensamiento más consciente, reflexivo y articulado. Así, el capítulo busca no solo describir propiedades geométricas, sino también mostrar cómo estas se convierten en herramientas para comprender el espacio y para formar una manera de pensar matemática más profunda y flexible.

Relaciones métricas en triángulos rectángulos y oblicuángulos

Hay relaciones matemáticas que, más allá de su formalidad, parecen contener una suerte de verdad íntima sobre el modo en que se organiza el espacio. Entre ellas, las relaciones métricas en los triángulos rectángulos y oblicuángulos ocupan un lugar privilegiado: no solo permiten medir, sino que revelan cómo el espacio se ordena, se abre, se proyecta y, en cierto sentido, se deja comprender.

Un triángulo no es solo una figura; es una estructura de pensamiento. En él se encuentran la rectitud y la oblicuidad, la constancia y la variación, el límite y la posibilidad. Por eso, al trabajar sus relaciones métricas, no enseñamos únicamente fórmulas; enseñamos a ver. Y ver, en geometría, implica comprender cómo los objetos se configuran, qué relaciones preservan, cuáles ceden o se transforman.

A lo largo de la historia de la matemática, las relaciones métricas han sido el puente entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento deductivo. Como advierte Tall (2014), la comprensión surge cuando el estudiante consigue articular su imagen conceptual como aquello que imagina cuando piensa en un ángulo que se abre, en un lado que crece, en una altura que cae, con la definición formal que captura el comportamiento de esas figuras bajo reglas precisas.

Pero para llegar ahí, el docente debe guiar un recorrido que no es solo cognitivo, sino epistemológico y didáctico. Van Hiele lo comprendió con claridad: el estudiante no nace sabiendo "razonar geométricamente"; necesita pasar por niveles de percepción, análisis, abstracción y deducción que deben ser cuidadosamente cultivados (Fuys et al., 1988).

La perpendicularidad como principio generativo: el triángulo rectángulo como origen

El triángulo rectángulo es quizá la figura más potente de la geometría clásica. No por su simplicidad, sino porque en él convergen tres elementos que definen la estructura del espacio euclidiano: la perpendicularidad, la proyección y la semejanza.

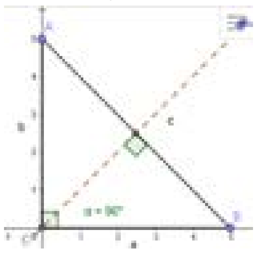
Cuando Euclides presenta el Teorema de Pitágoras, no lo hace como un procedimiento para "hallar un lado", sino como una equivalencia de áreas que explica una forma fundamental de equilibrio geométrico. Apostol (1991) insiste en este punto: Pitágoras no es un truco, sino una revelación sobre cómo se distribuye la extensión en un triángulo recto.

La altura trazada desde el vértice recto, es decir, esa línea silenciosa que cae con naturalidad hacia la hipotenusa, no es un adorno técnico.

Es, en sí misma, un acto geométrico: al caer, genera dos triángulos nuevos, cada uno semejante al original. La figura se multiplica, y con ella, la estructura métrica se hace visible.

Figura 1.

Descomposición métrica del triángulo rectángulo mediante la altura.



Nota: Elaboración propia.

Desde ahí nace todo: la relación entre catetos y proyecciones, la proporcionalidad de los triángulos semejantes, la equivalencia entre áreas, las razones trigonométricas como cocientes invariantes.

Así entendida, la perpendicularidad deja de ser un simple "dato geométrico" disponible en la figura para convertirse en un principio generativo que organiza la producción misma del espacio matemático. Esta idea, presente en la tradición euclidiana pero reinterpretada desde la didáctica contemporánea, invita a mirar la perpendicularidad no como una propiedad aislada sino como una estructura relacional que permite engendrar significados, definir objetos y establecer jerarquías conceptuales. En palabras de

Mariotti y Bussi (2020), toda relación que el estudiante construye sobre una figura es potencialmente un acto de pensamiento; y la perpendicularidad, por su potencia operativa, orienta ese pensamiento hacia la construcción de invariantes y sistemas.

En la geometría clásica, Euclides (Heath, 1956) utiliza la perpendicularidad para fundar nociones como altura, distancia mínima y ángulos rectos, que luego sirven para desarrollar teoremas más complejos. Desde esta perspectiva, la perpendicularidad produce matemática: de ella se derivan criterios de congruencia, definiciones de tangencia y caracterizaciones de simetría. No es unívoca: funciona como núcleo desde el cual se despliega un sistema coherente de relaciones.

En la didáctica de la geometría, esta idea adquiere un matiz epistemológico relevante. Duval (2017) explica que el sentido matemático no se encuentra en las figuras sino en el sistema de operaciones cognitivas que los estudiantes pueden realizar sobre ellas. La perpendicularidad, en cuanto operación se convierte en un motor epistemológico que tiende puentes entre diferentes registros: gráfico, discursivo y algebraico. Así, al construir una altura en un triángulo, el estudiante no "aplica una definición", sino que genera un dispositivo de lectura de la figura que redefine su estructura interna.

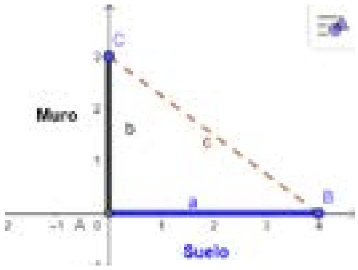
Cuando se define la distancia de un punto a una recta, la perpendicularidad actúa como criterio de optimización: selecciona el camino más corto entre infinitos posibles. En contextos más avanzados, la perpendicularidad sostiene la teoría de proyecciones ortogonales, indispensable en álgebra lineal, análisis vectorial y geometría analítica. Como señala Stewart (2016), las proyecciones permiten reescribir problemas geométricos en términos algebraicos y facilitan transiciones entre espacios de distinta dimensión.

Ejemplo 1:

Imagine una escalera apoyada en un muro. Sabemos que la parte inferior se desliza hacia afuera. Si quisiéramos modelar la longitud de la escalera, podríamos caer en la tentación de aplicar directamente el teorema de Pitágoras. Pero, desde esta mirada conceptual, la fórmula es solo la consecuencia final de un proceso más profundo: la escalera, el muro y el suelo conforman un triángulo rectángulo donde la perpendicularidad reparte el espacio.

La escalera no "vale" $\sqrt{a^2 + b^2}$; la escalera es la diagonal que equilibra el área combinada de dos cuadrados que expresan la extensión de los catetos.

Figura 2.
Representación geométrica de la escalera como hipotenusa del triángulo rectángulo.



Nota: Elaboración propia.

La oblicuidad como expansión del pensamiento: triángulos sin ángulos rectos

Una vez que el estudiante ha comprendido la estructura métrica del triángulo rectángulo, la geometría exige un salto conceptual: ¿qué ocurre cuando ningún ángulo es recto?

Aquí surge la necesidad de las leyes del seno y del coseno. No como herramientas de cálculo, sino como puentes conceptuales entre la rectitud y la oblicuidad. Freudenthal (1973) diría que, cuando el ángulo deja de ser recto, el fenómeno cambia: la perpendicularidad ya no estructura el espacio.

El docente debe ofrecer nuevas maneras de experimentar la figura. Esto puede hacerse desde dos intuiciones:

- **La visión angular:** la Ley del Seno nace cuando interpretamos que un lado no crece solo por su longitud, sino por la apertura del ángulo que lo sostiene.
- **La tensión lateral del triángulo:** la ley del coseno nace cuando reconocemos que el lado opuesto está influenciado no solo por los otros dos, sino por el "empuje" que genera el ángulo entre ellos.

Los triángulos oblicuángulos pueden inscribirse en circunferencias. Ese hecho aparentemente simple cambia todo: cada lado es una cuerda, y la apertura angular determina su longitud.

Figura 3.
Representación geométrica de la Ley del Seno en un triángulo inscrito en una circunferencia.

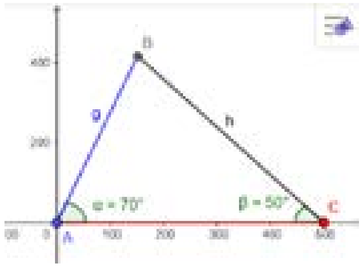
Nota: Elaboración propia.

Así, la Ley del Seno afirma $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$, donde **R** es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. Ruiz y Álvarez (2008) muestran que muchos estudiantes aplican la Ley del Seno sin entender que sus raíces están en esa configuración: el triángulo inscrito en un círculo.

Ejemplo: En el Parque Nacional Cotopaxi, un equipo de guardaparques necesita medir la distancia entre dos puntos remotos A y B para instalar un cable de monitoreo.

Desde un punto de observación C, que se encuentra a 500 metros de A, se mide el ángulo entre las líneas CA y CB, obteniendo un ángulo en C de 50°.

Figura 4.
Aplicación de la Ley del Coseno para determinar la distancia entre dos puntos remotos.



Nota: Elaboración propia.

Además, el ángulo en A entre las líneas AB y AC se midió como 70°. Con estos datos: ¿Cuál es la distancia entre los puntos A y B?

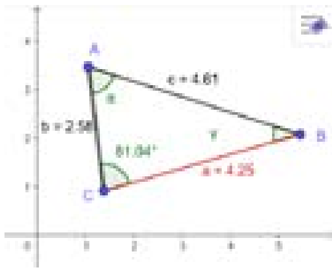
La distancia se determina directamente aplicando:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}(50^{\circ})} = \frac{500}{\operatorname{sen}(60^{\circ})} = 442.28m^{\cdot}$$

Ley del Coseno: Pitágoras modificado por el ángulo

La Ley del Coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos(\alpha)$, suele introducirse como una simple "extensión" del Teorema de Pitágoras para triángulos sin ángulo recto.

Figura 5.
Representación geométrica de la Ley del Coseno en un triángulo oblicuángulo.



Nota: Elaboración propia.

Para muchos autores, esta ley no es únicamente un resultado técnico, sino un punto donde convergen distintas concepciones del espacio: la geométrica clásica heredada de Euclides, la vectorial moderna, la fenomenológica del movimiento angular, la cognitiva del razonamiento visual y la didáctica de los registros semióticos.

Lo que habitualmente aparece como una fórmula estática es, en realidad, una expresión condensada de varias maneras de entender la geometría como ciencia de las relaciones. Este apartado recupera esas miradas, no para oponerlas, sino para permitir que dialoguen entre sí y restituyan a la Ley del Coseno su densidad conceptual.

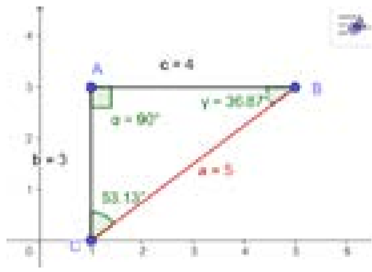
Aunque Euclides nunca escribió la Ley del Coseno con las formas algebraicas actuales, sí anticipó su estructura conceptual en los Libros II y VI de Los Elementos. En la Proposición 12 del Libro II, Euclides muestra cómo las áreas construidas sobre los lados de un triángulo no rectángulo se relacionan mediante una serie de paralelogramos y rectángulos cuya inclinación depende del ángulo interior.

Desde esta lectura:

- El término $b^2 + c^2$ expresa un equilibrio ideal de áreas "como si el triángulo fuera recto"
- El término $2bc\cos(\alpha)$ introduce la distorsión angular que rompe ese equilibrio.

La Ley del Coseno adquiere así un carácter casi poético: expresa cómo la oblicuidad perturba la "armonía pitagórica" del espacio. En palabras de Euclides, el triángulo oblicuo no puede ser leído sin considerar la inclinación de sus lados, algo que la fórmula moderna captura con precisión. Freudenthal (1973), desde su teoría de la matematización, sostiene que la clave está en recuperar el fenómeno: ¿qué pasa realmente con un triángulo cuando su ángulo se abre o se cierra? (Figura 6).

Figura 6.
Variación del lado opuesto en función de la apertura del ángulo según la Ley del Coseno.



Nota: Elaboración propia.

1. Cuando $A = 90^{\circ}$, el triángulo está en una forma "estable" y se cumple Pitágoras.

2. Cuando $A < 90^{\circ}$, los lados se acercan: el triángulo "tira" hacia dentro, y la corrección angular es negativa.
3. Cuando $A > 90^{\circ}$, el triángulo "se abre" y se vuelve expansivo: la corrección es positiva.

La Ley del Coseno traduce ese comportamiento en una relación precisa. No describe un fenómeno abstracto: describe el movimiento. En términos freudenthalianos, es un ejemplo poderoso de cómo un concepto matemático captura la estructura de un fenómeno que podría experimentarse con simples varillas articuladas.

Duval (2017) argumenta que la dificultad no radica en la complejidad de la fórmula, sino en que el estudiante no logra coordinar los registros de representación:

- **Figural:** ver cómo cambia el lado opuesto al ángulo,
- **Verbal:** describir cómo la variación angular altera la figura,
- **Simbólico:** comprender la estructura $b^2 + c^2 - bc\cos(\alpha)$
- **Dinámico:** observar la figura en movimiento usando software.

La Ley del Coseno solo se comprende cuando el estudiante puede pasar de uno a otro registro sin perder coherencia. Desde esta posición, enseñar la fórmula sin su traducción figural y dinámica equivale a quitarle su significado. Mariotti y Bussi (2020) enfatizan que la comprensión geométrica se construye en la interacción discursiva. Desde esta óptica, la Ley del Coseno no se enseña aplicándola, sino discutiéndola: ¿por qué aparece la corrección angular? ¿Por qué el coseno negativo hace crecer el lado? ¿Qué ocurre si el ángulo es obtuso?

En este sentido, la Ley del Coseno es un excelente terreno didáctico:

- Permite comparar triángulos.
- Invita a argumentar sobre tamaños relativos.
- Revela el papel del ángulo en la forma global de la figura.

Semejanza de triángulos y razón de proporcionalidad

La noción de semejanza constituye uno de los pilares conceptuales de la geometría euclidiana porque articula la forma, la medida y la proporcionalidad como un sistema coherente para describir el espacio. Entendida desde el aula, la semejanza permite al estudiante transitar desde la intuición visual de "figuras con la misma forma" hacia una comprensión formal que implica ratios constantes, invariantes geométricos y transformaciones que preservan la proporcionalidad.

Como señala Hartshorne (2000), la semejanza es un puente entre la geometría elemental y la teoría de las transformaciones, y su enseñanza representa una oportunidad privilegiada para desarrollar pensamiento multiplicativo, razonamiento proporcional y comprensión profunda de la estructura del triángulo, un objeto central en la matematicidad escolar.

Se aborda la semejanza desde tres perspectivas complementarias: una geométrica–teórica, una métrica–aplicada y una didáctica anclada en los niveles del modelo de Van Hiele. Se busca mostrar que la semejanza no es un concepto aislado sino un eje generador que permite establecer relaciones métricas en triángulos, definir razones trigonométricas, comprender propiedades de poliedros y modelar problemas de escala en cuerpos de revolución. A través de esta mirada integradora, se construye una articulación entre la teoría clásica (Euclides, Hilbert), las aproximaciones contemporáneas del razonamiento geométrico (Duval, 2017; Mariotti & Bussi, 2020) y los desafíos actuales de su enseñanza.

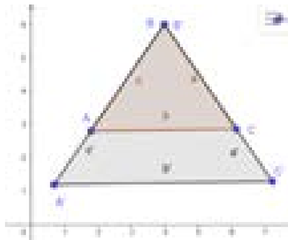
Partiendo de la premisa de la centralidad de las actividades semióticas, la discusión matemática colectiva desempeña un papel crucial: durante esta discusión, la acción intencional del docente se centra en guiar el proceso de mediación semiótica que conduce a la evolución esperada de los signos. El papel del docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje basado en el uso de artefactos y, en particular, en un entorno de geometría dinámica (Mariotti, 2009).

Idea fundamental de semejanza: forma, invariancia y multiplicación escalar

Dos triángulos son semejantes cuando conservan la forma, aun si no conservan el tamaño. Este enunciado, aparentemente simple, esconde una riqueza conceptual profunda: la forma puede ser entendida como aquello que permanece invariante frente a una transformación de escala.

Desde un punto de vista matemático, la semejanza se formaliza mediante transformaciones homotéticas que multiplican todas las distancias por un mismo factor k. Como lo explica Coxeter (1963), dicha multiplicación uniforme preserva ángulos y direcciones, lo que permite mantener la estructura proporcional interna de la figura.

Figura 7.
Triángulos homotéticos que conservan la estructura proporcional bajo un mismo factor de escala.



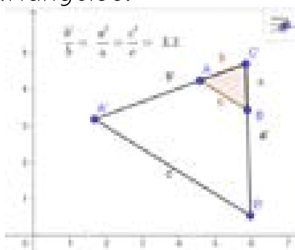
Nota: Elaboración propia.

El teorema fundamental establece que dos triángulos son semejantes si se cumple alguno de los siguientes criterios equivalentes:

- **AAA:** Igualdad de sus tres ángulos.
- **LAL:** Proporcionalidad de dos lados incluidos entre ángulos iguales.
- **LLL:** Proporcionalidad de los tres lados.

Estas condiciones, ya presentes en los Elementos de Euclides, adquieren relevancia moderna al comprenderse como equivalentes a la existencia de una transformación homotética entre las figuras (Hartshorne, 2000). En efecto, cuando el estudiantado comprende que no es necesario comparar todos los elementos del triángulo sino solo una estructura mínima de proporcionalidad, se abre paso a un pensamiento geométrico más abstracto y relacional.

Figura 8.
Relación de proporcionalidad entre lados homólogos como fundamento de la semejanza de triángulos.



Nota: Elaboración propia.

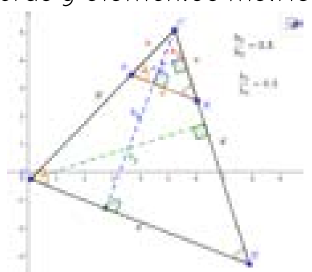
En el aula, esta comprensión se fortalece cuando se vinculan representaciones visuales con expresiones simbólicas. Por ejemplo, al observar que en dos triángulos semejantes se cumple: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$, el estudiante empieza a identificar el factor de escala como la constante que relaciona ambas figuras. Este razonamiento multiplicativo es fundamental para comprender fenómenos reales como mapas, escalas arquitectónicas, ampliaciones fotográficas y modelos tridimensionales.

La razón de proporcionalidad constituye el corazón métrico de la semejanza. Representa el número que permite pasar de un triángulo base a un triángulo ampliado o reducido. Pero más allá de su uso numérico, la razón de proporcionalidad organiza la estructura interna de la figura: determina cómo se relacionan sus alturas, sus medianas, sus bisectrices y hasta sus áreas.

Si $\triangle\mathrm{ABC} \sim \triangle\mathrm{A'B'C'}$ con factor k, entonces: $\mathbf{AB} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{A'B'}, \mathbf{BC} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{B'C'}, \mathbf{CA} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{C'A'}$. Este resultado, aparentemente evidente, permite comprender fenómenos métricos más complejos. Por ejemplo, las alturas también guardan proporcionalidad: $\mathbf{h_a} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{h'_a}$, y lo mismo ocurre con radios inscritos y circunscritos, lo que muestra la potencia de la semejanza para unificar múltiples relaciones métricas.

Figura 9.

Proporcionalidad de alturas y elementos métricos derivados en triángulos semejantes.



Nota: Elaboración propia.

Proporcionalidad cuadrática en áreas

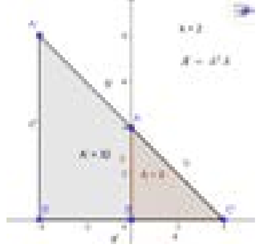
La proporcionalidad cuadrática es uno de los resultados más bellos y a la vez más difíciles de internalizar para el estudiantado. La intuición opera inicialmente en un plano lineal: duplicar un lado "parece" que debería duplicar el área. Sin embargo, como explican Pape y Tchoshanov (2001), el desarrollo del pensamiento multiplicativo requiere comprender que el área surge de la interacción de dos dimensiones simultáneamente. De allí que la semejanza no solo escale longitudes: amplifica la figura en dos direcciones, generando una transformación cuadrática.

Si dos triángulos $\triangle\mathbf{ABC} \sim \triangle\mathbf{A'B'C'}$ son semejantes con factor **k**, se cumple:

$$[\mathrm{ABC}] = \mathrm{k}^2 \cdot [\mathrm{A'B'C'}]$$

La ecuación expresa que el área no crece por adición sino por multiplicación compuesta. Como señala Tall (2014), este salto cognitivo implica pasar de un razonamiento "uno-a-uno" a un razonamiento "multivariable": la escala afecta ancho y altura, lo cual es difícil de asimilar sin representaciones visuales dinámicas. Aquí, los softwares geométricos como GeoGebra resultan cruciales para observar cómo, al arrastrar un punto, el área se transforma a una tasa cuadrática.

Figura 10.
Relación cuadrática de las áreas en triángulos semejantes con factor de escala k.

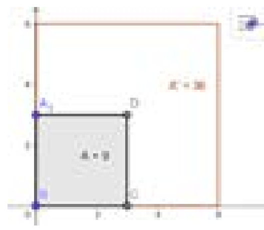


Nota: Elaboración propia.

Desde una perspectiva aplicada, comprender esta ley es indispensable en arquitectura, diseño de modelos, fabricación de piezas y representación proporcional en planos. Una maqueta construida a escala 1:51:51:5 no requiere cinco veces menos material, sino veinticinco veces menos. Ignorar este principio tiene implicaciones económicas reales. Jones y Tzekaki (2016) sostienen que el fracaso en comprender el crecimiento cuadrático explica errores frecuentes en el aprendizaje de geometría y en la resolución de problemas aplicados.

Pero la proporcionalidad cuadrática no opera solo en triángulos: se generaliza a cualquier región plana.

Figura 11.
Ampliación de una región plana y crecimiento cuadrático de su área.

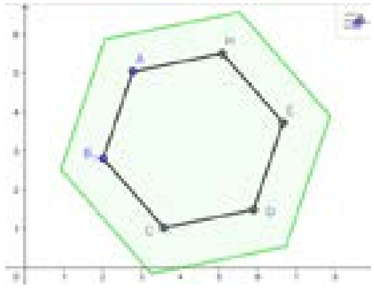


Nota: Elaboración propia.

Así, si un cuadrado con lado s se transforma mediante un factor de escala k, su área será: $\mathrm{A} = (\mathrm{ks})^2 = \mathrm{k}^2\mathrm{s}^2$. Lo mismo aplica para polígonos regulares, trapecios, figuras curvas aproximadas y regiones construidas por descomposición. Por ello, el razonamiento cuadrático no es un contenido aislado, sino un principio generador que atraviesa toda la geometría métrica y analítica.

Ejemplo: Una ciudad tiene una plazoleta central con forma de hexágono regular. Cada lado del hexágono interior mide 20 m. En un proyecto de renovación urbana se decide ampliar la plazoleta manteniendo la forma, de modo que el contorno exterior sea un hexágono regular semejante, con todas las longitudes multiplicadas por un factor de escala $\mathrm{K} = 15$. Es decir, el hexágono exterior es una “versión agrandada” del interior, como en tu construcción de GeoGebra.

Figura 12.
Ampliación homotética de una plaza hexagonal con factor de escala k=1.5.



Nota: Elaboración propia.

1. Calcular la longitud del lado del hexágono exterior.
2. Calcular el área de la plazoleta original (hexágono interior).
3. Calcular el área total delimitada por el hexágono exterior.
4. Calcular el área del anillo pavimentado nuevo, es decir, la región entre ambos hexágonos.
5. Verificar que el área se ha multiplicado por $\mathbf{k^2}$.

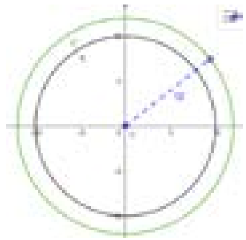
Tabla 1.
Cálculos de longitudes y áreas en hexágonos semejantes con factor de escala k=1.5k.

Longitud del lado del hexágono exterior	$s\prime = k \cdot s = 1{,}5 \cdot 20 = 30\text{m}.$
Área de la plazoleta original (hexágono interior).	$A_{int} = \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}(20)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 400 \approx 1039{,}2\ m^2$
Área total delimitada por el hexágono exterior.	$A_{ext} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(s')^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}(30)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 900.$ $A_{ext} \approx 1350 \cdot 1{,}732 \approx 2338{,}2\ m^2$
Área del anillo pavimentado nuevo, es decir, la región entre ambos hexágonos.	$A_{anillo} = A_{ext} - A_{int} = 1350\sqrt{3} - 600\sqrt{3} = \Big(1350 - 600\Big)\sqrt{3} = 750\sqrt{3}\ m^2 \approx 1299\ m^2$
Verificar que el área se ha multiplicado por $\mathbf{k^2}$	$k = 1{,}5 \Rightarrow k^2 = (1{,}5)^2 = 2{,}25$ $\frac{A_{ext}}{A_{int}} = \frac{1350\sqrt{3}}{600\sqrt{3}} = \frac{1350}{600} = \frac{135}{60} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2{,}25$

Nota. La tabla presenta el proceso de cálculo de las áreas asociadas a un hexágono regular y a su imagen homotética con razón 1.5, verificando la relación cuadrática entre áreas y la escala de semejanza. Elaboración propia.

Ejemplo: Una plaza circular tiene radio 10 m. El municipio quiere construir una nueva plaza semejante, con todas sus dimensiones multiplicadas por $\mathbf{k = 1{,}2}$.

Figura 13.
Plaza circular y su versión homotética con factor de escala k=1.2.



Nota: Elaboración propia.

1. ¿Cuál será el radio de la nueva plaza?
2. Usa la fórmula $A = \pi r^2$ para encontrar el área de ambas plazas.
3. Verifica que el área se ha multiplicado por k^2..
4. Si el césped cuesta $6USD/m^2$., ¿cuánto aumenta el costo total de césped?

Tabla 2.
Cálculos del radio, áreas y costos en una plaza circular ampliada con factor de escala k=1.2.

Radio de la nueva plaza	$r\prime = k \cdot r = 1{,}2 \cdot 10 = 12m.$ Radio de la nueva plaza: $r\prime = 12m$.
Área de ambas plazas	$A_{int} = \pi r^2 = \pi(10)^2 = 100\pi\ m^2 \approx 314{,}16\ m^2$ $A_{ext} = \pi(r')^2 = \pi(12)^2 = 144\pi m^2 \approx 452,39m^2$
Verifica que el área se ha multiplicado por k^2.	$\frac{A_{ext}}{A_{int}} = \frac{144\pi}{100\pi} = \frac{144}{100} = 1,44$ $k^2 = (1,2)^2 = 1,44$ $\frac{A_{ext}}{A_{int}} = k^2 = 1,44,$ queda comprobado que el área se ha multiplicado por k^2, tal como indica la teoría de semejanza: al escalar las longitudes por k, las áreas se escalan por k^2.
Si el césped cuesta $6USD/m^2$, ¿cuánto aumenta el costo total de césped?	$C_{int} = 6 \cdot A_{int} = 6 \cdot 100 = 600\pi USD \approx 1884{,}96USD$ $C_{ext} = 6 \cdot A_{ext} = 6 \cdot 144 = 864\pi USD \approx 2710,66\,USD$ Aumento del Costo: $\Delta C = C_{ext} - C_{int} = 864\pi - 600 = 264\pi USD \approx 825,70\,USD$ El costo total del césped aumenta aproximadamente en 825,70 USD.

Nota. La tabla muestra el proceso de cálculo del radio homotético, las áreas de ambas plazas y la verificación de la relación cuadrática entre áreas y el factor de escala, así como la variación del costo del césped en función del área. Elaboración propia.

Apoyo didáctico: El estudiantado no debe ver las fórmulas de área como recetas aisladas, sino como modelos para comprender relaciones de proporcionalidad. Se propone partir de la intuición y la experiencia: anticipar cómo cambia el área y el costo al modificar el radio, dibujar, discutir y luego formalizar la idea de que un aumento lineal del radio genera un aumento cuadrático del área. El logro de la competencia y comprensión por parte de los estudiantes de los distintos componentes de un saber matemático requiere el diseño y la implementación de procesos de instrucción que tengan en cuenta dichos componentes (Godino, 2005).

El uso de GeoGebra o Desmos permite explorar dinámicamente las diferentes relaciones, completar tablas y comparar radios, áreas y costos, favoreciendo el paso entre registros de representación (verbal, gráfico y simbólico) que Duval (2017) considera esencial para construir significado matemático. Además, se sugiere comparar distintos procedimientos de resolución (con y sin uso directo del factor de semejanza k^2, para promover la argumentación y la toma de decisiones matemáticas conscientes, en coherencia con la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (2002).

Poliedros y cuerpos de revolución: clasificación y propiedades
Comprender los poliedros y los cuerpos de revolución supone asumir que la geometría del espacio no es solo un conjunto de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, sino una forma de pensamiento que articula estructura, simetría y movimiento. En el espacio tridimensional, las figuras dejan de ser simples contornos visibles y se convierten en sistemas organizados. Como señalan Hilbert y Cohn-Vossen (1952), una figura geométrica es siempre el resultado de idealizar una experiencia tridimensional: no es una copia del mundo, sino un “modelo depurado” de algunas de sus invariantes esenciales. Los poliedros y los cuerpos de revolución, en este sentido, permiten observar cómo la matemática abstrae lo que permanece constante en medio de la diversidad de formas y tamaños. En este epígrafe ampliado profundizamos en la clasificación de estas figuras, su estructura interna, sus propiedades métricas y sus significados didácticos y epistemológicos. Lo hacemos desde una visión integradora, coherente con el espíritu del libro: comprender el espacio como experiencia, como estructura y como lenguaje.

Qué entendemos por poliedros y cuerpos de revolución
Llamamos poliedro a todo sólido limitado por un número finito de polígonos planos, que se encuentran por sus lados formando aristas y por sus vértices formando ángulos sólidos. Coxeter (1963) define

el poliedro como una "red de polígonos ensamblados en el espacio" que constituye una estructura cerrada. Esta idea de ensamblaje es pedagógicamente fértil, ya que invita a pensar los sólidos como construcciones que se pueden desmontar en sus "piezas" planas, las caras, y volver a montar a través de desarrollos o redes.

Por su parte, un cuerpo de revolución se obtiene al girar una figura plana alrededor de una recta de su plano. El giro produce un sólido cuyas secciones perpendiculares al eje son congruentes o al menos relacionadas de forma regular. Hilbert y Cohn-Vossen (1952) subrayan que esta forma de generar sólidos introduce una perspectiva dinámica de la geometría: el cuerpo de revolución es "la huella" de un movimiento, una curva que se desplaza en el espacio.

Ambos tipos de sólidos permiten trabajar con la idea de volumen como ocupación del espacio, así como con áreas de superficies que ya no son sólo polígonos planos, sino envolventes que "rodean" una región tridimensional. Esta ampliación conceptual es central para el estudio posterior del cálculo integral y de la modelación geométrica de fenómenos físicos (Stewart, 2016).

Clasificación de poliedros: prismas, pirámides y sólidos regulares

Prismas y pirámides

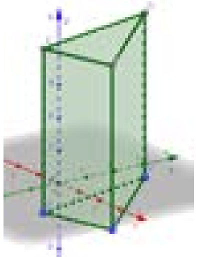
Una primera clasificación distingue entre prismas y pirámides.

Un prisma es un poliedro con dos bases congruentes y paralelas, unidas por caras laterales que son paralelogramos.

La naturaleza del polígono base (triángulo, cuadrilátero, pentágono, etc.) determina el nombre del prisma.

Figura 14.

Representación tridimensional de un prisma con bases congruentes y caras laterales paralelográmicas.

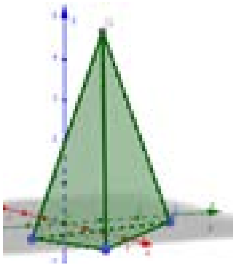


Nota: Elaboración propia.

Una pirámide es un poliedro con una base poligonal y caras laterales que son triángulos que se encuentran en un vértice común, el ápice. De nuevo, el nombre responde al número de lados de la base: pirámide triangular, cuadrangular, pentagonal, y así sucesivamente.

Esta clasificación tiene una ventaja didáctica evidente. Permite un diálogo permanente entre plano y espacio. Un prisma puede verse como "un polígono que se desplaza en línea recta", mientras que una pirámide puede interpretarse como "un polígono que se contrae hasta un punto (Godino y Batanero, 2007). Estas imágenes dinámicas ayudan a los estudiantes a vincular el volumen con la idea de suma de infinitas secciones o láminas, anticipando intuitivamente el uso del cálculo.

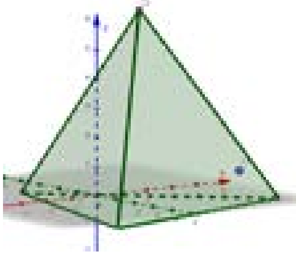
Figura 15.
Representación tridimensional de una pirámide con base poligonal y un vértice común o ápice.



Nota: Elaboración propia.

Una familia particularmente importante es la de los poliedros regulares, aquellos cuyas caras son polígonos regulares congruentes y en cada vértice concurren el mismo número de caras.

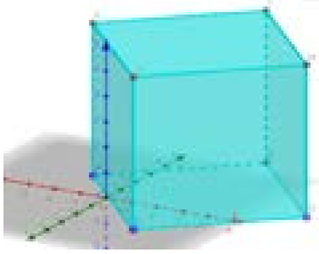
Figura 16.
Modelo tridimensional de un poliedro regular construido a partir de caras congruentes.



Nota: Elaboración propia.

Desde la Antigüedad se conoce que sólo existen cinco, los llamados sólidos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro (Coxeter, 1963). Estos sólidos ejemplifican la máxima simetría posible en el espacio euclídeo tridimensional.

Figura 17.
Representación tridimensional de un cubo como ejemplo de sólido platónico.



Nota: Elaboración propia.

A su lado se sitúan los poliedros semirregulares o sólidos arquimedianos, que admiten más de un tipo de polígono regular como cara, pero mantienen una estructura de vértices "uniforme".

Su estudio introduce de manera natural la noción de dualidad y de truncamiento, es decir, operaciones sobre poliedros que permiten generar nuevas formas a partir de otras, y que pueden explorarse con modelos físicos o software de geometría dinámica tridimensional (Hilbert y Cohn-Vossen, 1952).

El trabajo con prismas, pirámides y sólidos regulares no se limita al reconocimiento de figuras; debe promover procesos de construcción, manipulación y argumentación. Actividades como modelar poliedros con software dinámico (GeoGebra 3D), analizar sus redes, comparar sus volúmenes mediante razonamiento proporcional o investigar la presencia de sólidos regulares en estructuras naturales favorecen un aprendizaje significativo en el sentido de Ausubel (2000). Asimismo, la combinación de manipulativos físicos y entornos digitales permite que el estudiante relacione la estructura tridimensional con sus representaciones en planos, vistas y diagramas, logrando así una comprensión más profunda y flexible.

Volúmenes y áreas de cuerpos geométricos

La teoría del área y del volumen ha sido presentada tradicionalmente como un conjunto de fórmulas acabadas, resultado de un proceso histórico lineal y acumulativo. Sin embargo, autores como Netz (2004), Manders (2008) y Presmeg (2020) han mostrado que su desarrollo conceptual no ha estado exento de tensiones internas, reinterpretaciones y rupturas epistemológicas. La idea de "medir el espacio" se ha construido a partir de disputas entre aproximación intuitiva y rigor deductivo, entre razonamiento visual y cálculo formal, entre experiencia física y abstracción matemática.

Por ejemplo, Manders (2008) sostiene que la geometría antigua no se basaba en la noción moderna de magnitudes continuas, sino en sistemas altamente diagramáticos donde el razonamiento dependía de inferencias visuales, no de ecuaciones. Esto cuestiona la idea extendida de que las fórmulas actuales sobre volumen y área son una "continuidad natural" de descubrimientos antiguos: más bien se trata de reconstrucciones modernas sobre marcos conceptuales muy diferentes.

A nivel pedagógico, Duval (2017) critica la enseñanza centrada en fórmulas porque produce una "despersonalización" del pensamiento geométrico: el estudiante aprende a aplicar procedimientos sin comprender los sistemas de relaciones que les dan sentido. Tall (2014) coincide al señalar que la transición entre el pensamiento sensorio-motriz, el pensamiento visual y el pensamiento formal no ocurre automáticamente; requiere un andamiaje que reconstruya el concepto desde múltiples representaciones.

Otros autores, como Fischbein (1993), advierten que la noción de volumen es particularmente susceptible a errores cognitivos persistentes, ya que las intuiciones espaciales no siempre coinciden con las propiedades matemáticas. Por ejemplo, muchos estudiantes creen que, si se duplica un radio y se mantiene la altura, “el volumen también se duplica”, desconociendo las relaciones cúbicas que gobiernan los cuerpos de revolución.

Desde estos enfoques críticos, el área y el volumen no se entienden como un “capítulo técnico”, sino como un terreno donde convergen epistemología, psicología cognitiva, visualización, lenguaje matemático y razonamiento proporcional. Esta mirada analítica permite profundizar en las bases del cálculo geométrico y comprender por qué algunos conceptos como apotema, generatriz o sección transversal continúan siendo difíciles para estudiantes incluso en niveles avanzados.

Tensiones epistemológicas en la noción de área y volumen

Heath (1956) resalta que Arquímedes utilizaba métodos heurísticos que serían considerados “impropios” dentro del marco axiomático euclidiano. Esta tensión histórica revela un conflicto entre dos visiones:

- **La geometría como intuición estructural**, que admite razonamientos basados en equilibrio, corte y recomposición.
- **La geometría como sistema axiomático**, donde solo cuentan las demostraciones formales.

En el aula, la segunda suele imponerse, generando dificultades para estudiantes que aún operan en modos de pensamiento visual (Duval, 2017).

Autores contemporáneos de análisis, como Ciarlet (2025), muestran que la definición moderna de área se formula rigurosamente a partir de la teoría de medida y de las integrales de Riemann y, sobre todo, de Lebesgue, en contraste con las aproximaciones geométrico-discretas con las que suele enseñarse este concepto en la educación secundaria.

Esto genera una brecha conceptual: la escuela enseña área como suma de superficies “planas”, mientras que la universidad la redefine como límite de particiones infinitesimales.

Presmeg (2020) advierte que el énfasis tradicional en fórmulas descontextualizadas reduce el razonamiento espacial a un proceso automático. Fischbein (1993) muestra que esto genera “ilusiones cognitivas” difíciles de superar, pues el estudiante memoriza sin conectar las fórmulas con su origen geométrico.

Ejemplos críticos que revelan dificultades conceptuales

La investigación didáctica ha documentado que el área y el volumen son conceptos "epistémicamente sensibles": pequeños malentendidos generan errores persistentes (Fischbein, 1993; Hershkowitz, 2011). Los siguientes ejemplos permiten analizar estas dificultades desde perspectivas críticas.

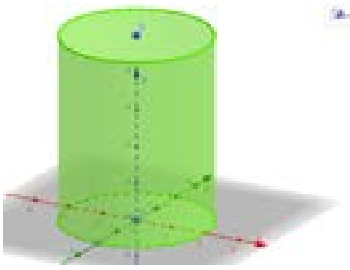
Ejemplo 2: Área lateral del cilindro: un pensamiento engañoso

Muchos estudiantes creen que "el cilindro se abre en un cuadrado", cuando en realidad el desarrollo plano de su superficie lateral es un rectángulo cuyo ancho corresponde al perímetro de la base, no al diámetro. Este error deriva de una intuición "plana" que no reconoce la naturaleza envolvente de la superficie curva (Duval, 2017)

Ejemplo correcto: Cilindro de radio 4 cm y altura 10 cm:

$$\mathrm{A_L} = 2\pi \mathrm{rh} = 2\pi(4)(10) = 80\pi \mathrm{cm}^2$$

Figura 18.
Representación tridimensional del cilindro y su superficie lateral para el cálculo del área.



Nota: Elaboración propia.

Esta comprensión requiere coordinar registros: el registro gráfico (desarrollo plano), el registro geométrico (perímetro de la base) y el registro algebraico (fórmula). La incoordinación entre estos explica el error.

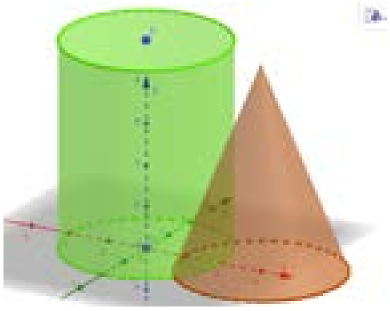
Ejemplo 3: Volumen del cono: error clásico de proporcionalidad

Muchos estudiantes piensan que si un cilindro y un cono tienen la misma base y altura, "el volumen del cono es la mitad". Esto contradice la estructura geométrica:

$\mathrm{V_{cono}} = \frac{1}{3}(\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{h})$. La razón 1:3 no es evidente para la intuición.

Como señala Fischbein (1993), los errores de proporcionalidad volumétrica se deben a que el pensamiento intuitivo mantiene asociaciones lineales incluso en contextos exponenciales o cúbicos.La reducción lineal del radio hacia un vértice implica una contracción cúbica del volumen, lo cual exige una comprensión avanzada del espacio tridimensional.

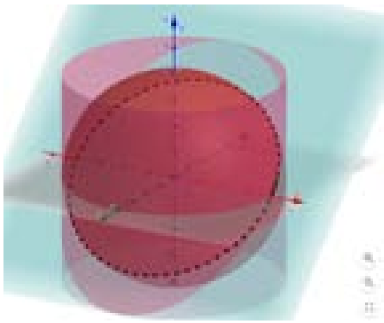
Figura 19.
Comparación visual entre el cilindro y el cono para analizar la razón volumétrica 1:3.



Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 4: La esfera como cuerpo "cognitivamente opaco"
Según McGee (1999), incluso estudiantes universitarios presentan dificultades para:

Figura 20.
Relación entre la esfera y el cilindro circunscrito para visualizar área y volumen.



Nota: Elaboración propia.

- Comprender que la superficie de la esfera equivale al área del cilindro circunscrito sin tapas,
- Aceptar que el volumen de la esfera depende del cubo del radio,
- Visualizar cortes no circulares según el ángulo del plano secante,
- Entender que la esfera no tiene desarrollo plano exacto.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Fórmulas fundamentales de áreas y volúmenes en cuerpos geométricos

Tabla 3.
Fórmulas fundamentales de áreas y volúmenes en cuerpos geométricos

Cuerpo geométrico	Área lateral	Área total	Volumen
Prisma	$A_L = P_b h$	$A_T = P_b h + 2A_b$	$V = A_b h$
Pirámide	$A_L = \frac{1}{2} P_b a_l$	$A_T = \frac{1}{2} P_b a_l + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b h$
Cilindro	$A_L = 2\pi r h$	$A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$	$V = \pi r^2 h$
Cono	$A_L = \pi r g$	$A_T = \pi r g + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Esfera		$A_T = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cubo		$A_T = 6a^2$	$V = a^3$
Tetraedro regular		$A_T = \sqrt{3}a^2$	$V = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$

Nota. La tabla sintetiza las expresiones esenciales para calcular el área lateral, el área total y el volumen de diversos cuerpos geométricos que se utilizan con frecuencia en la resolución de problemas métricos. Elaboración propia.

Problemas aplicados y contextualizados

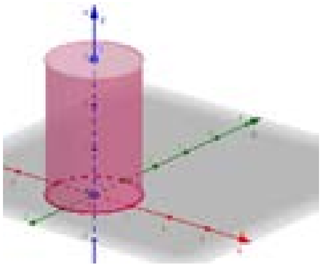
Los siguientes ejercicios aplican los conceptos anteriores en contextos reales y formativos. Cada uno está diseñado para promover razonamiento espacial, modelación matemática y análisis crítico.

Ejemplo: Diseño de un tanque cilíndrico ecológico

Una comunidad rural desea construir un tanque cilíndrico para almacenar agua lluvia. El diámetro debe ser 2 metros y la altura 3 metros.

- Determine el volumen total del tanque.
- Calcule el área total de material necesario para su construcción (sin tapa).
- Analice si la intuición coincide con el resultado obtenido.

Figura 21.
Representación del tanque cilíndrico para el cálculo de volumen y área de construcción.



Nota: Elaboración propia.

Tabla 4.
Cálculo del volumen y áreas asociadas a un tanque cilíndrico

Radio	$\mathbf{r = 1m}$
Volumen	$V = \pi r^2 h = \pi(1)^2(3) = 3\pi m^3$
Área lateral	$A_L = 2\pi rh = 2\pi(1)(3) = 6\pi m^2$
Área de la base	$A_b = \pi r^2 = \pi m^2$
Área total	$A_T = 6\pi + \pi = 7\pi m^2$

Nota. La tabla presenta los valores geométricos fundamentales del tanque cilíndrico a partir de sus dimensiones, con el fin de estimar la capacidad de almacenamiento y el material de construcción requerido. Elaboración propia.

Intuitivamente, muchos estudiantes predicen un volumen "mayor", pues asocian "altura grande con volumen grande", sin considerar la dependencia cuadrática del radio (Tall, 2014).

Ejemplo: Optimización de envases comerciales.

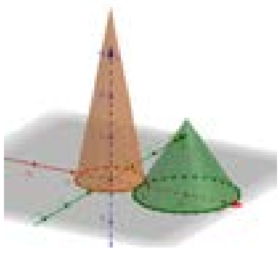
Una empresa fabrica envases cónicos para café. Cada envase debe tener 350 cm. El departamento de diseño afirma que "a mayor radio, menor altura" y que esto "no afecta la cantidad de material necesario".

Determine si esta afirmación es correcta hallando el área lateral de dos envases distintos:

- **Modelo A:** radio 4 cm.
- **Modelo B:** radio 6 cm.

Use la relación del volumen del cono para hallar las alturas.

Figura 22.
Comparación geométrica de dos envases cónicos con igual volumen y radios distintos para analizar el área lateral requerida.



Nota: Elaboración propia.

Solución: Volumen: $\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 350}$.

Tabla 5.
Cálculo comparativo de altura, generatriz y área lateral en dos envases cónicos con igual volumen

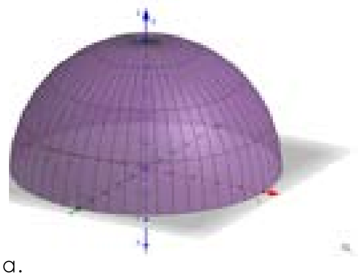
Modelo A	$\mathbf{350 = \frac{1}{3}\pi(16)h \Rightarrow h \approx 20.9cm}$
Generatriz	$\mathbf{g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 20.9^2} \approx 21.3}$
Área lateral	$A_L = 2\pi rh = 2\pi(1)(3) = 6\pi m^2$
Modelo B:	$\mathbf{350 = \frac{1}{3}\pi(36)h \Rightarrow h \approx 9.3cm}$
Generatriz	$\mathbf{g = \sqrt{6^2 + 9.3^2} \approx 11.1}$
Área lateral	$\mathbf{A_L = \pi(6)(11.1) \approx 209cm^2}$

Nota. La tabla presenta el análisis geométrico de dos modelos de envases cónicos, ambos con volumen fijo de 350 cm³, pero con radios diferentes, a fin de comparar cómo varían la altura, la generatriz y el área lateral requerida para su fabricación. Elaboración propia.

Contrario a la afirmación del departamento, el área sí cambia significativamente. El modelo con mayor radio usa menos material, lo que ilustra cómo la geometría puede ser clave en la eficiencia industrial (Ciarlet, 2025).

Ejemplo: Un domo geodésico para una feria científica se construirá como un hemisferio de radio 5 metros.

Figura 23.
Representación geométrica de un domo hemisférico de radio 5 metros para el análisis de volumen y superficie.



Nota: Elaboración propia.

- Calcule su volumen interno.
- Estime el área superficial externa.
- Analice la dificultad cognitiva de este problema.

Tabla 6.
Cálculo del volumen interno y del área superficial externa de un domo hemisférico

Volumen interno.	$\mathbf{V_{hemisferio} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\square r^3) = \frac{2}{3}\square(125) = \frac{250}{3}\square.}$
Área superficial externa	$\mathrm{A_{hemisferio}} = 2\pi \mathrm{r}^2 = 2\pi(25) = 50\pi.$

La dificultad surge porque los estudiantes suelen creer que "la mitad de una esfera tiene la mitad de área", lo cual es falso. Aunque el volumen sí es la mitad, el área no lo es, debido a la falta de las tapas (McGee, 1999).

Apoyo didáctico: Para fortalecer el aprendizaje significativo de áreas y volúmenes, se recomienda un enfoque integrado que combine:

1. Construcción activa y modelación física

Permitir que los estudiantes manipulen redes, construyan poliedros, corten modelos y comparen volúmenes mediante recipientes o material manipulativo. Esta experiencia concreta reduce la distancia entre percepción y concepto (Van Hiele, 1986; Hershkowitz, 2011).

2. Articulación entre representaciones

Proponer actividades donde se pase deliberadamente de:

- La figura 3D a su desarrollo,
- La fórmula al argumento geométrico,
- La vista del sólido a su corte transversal,
- El caso particular al caso general.

Duval (2017) subraya que este tránsito es indispensable para una comprensión profunda.

3. Resolución de problemas contextualizados

Incluir problemas que conecten los cuerpos geométricos con situaciones reales: diseño de depósitos, empaques, domos, recipientes, estructuras arquitectónicas o modelos físicos. Presmeg (2020) destaca que la visualización se fortalece cuando los objetos adquieren función y sentido.

4. Debate sobre errores y contraejemplos

Analizar errores comunes: como pensar que un cilindro se abre en un cuadrado o que un cono tiene la mitad del volumen de un cilindro, permite reconstruir las intuiciones espaciales desde el razonamiento lógico (Fischbein, 1993).

5. Integración gradual de herramientas digitales

Utilizar software como GeoGebra 3D para explorar dinámicamente cortes, desarrollos y variaciones paramétricas. Estas herramientas permiten observar relaciones que de otra forma serían invisibles, y apoyan el paso del pensamiento icónico al pensamiento formal (Tall, 2014).

Una enseñanza más reflexiva y conceptual del área y el volumen no solo conduce a mejores resultados académicos, sino que promueve una forma más madura de pensar matemáticamente. Los estudiantes que comprenden el significado de las fórmulas, que reconocen las relaciones internas de los cuerpos y que logran moverse entre diferentes representaciones desarrollan un pensamiento geométrico sólido y transferible a la ingeniería, la arquitectura, la física y otros campos del conocimiento. Es esta integración entre intuición, visualización, razonamiento y formalización, la que convierte la geometría tridimensional en una verdadera herramienta para interpretar y modelar el mundo.

Modelo de Van Hiele: niveles de razonamiento geométrico

El estudio del razonamiento geométrico ha sido una preocupación central para la didáctica de la matemática, particularmente en contextos donde el aprendizaje se concibe como un proceso de transición entre formas elementales de intuición espacial y modos avanzados de pensamiento formal. Entre los modelos más influyentes en la comprensión de este proceso se encuentra el *Modelo de Van Hiele*, desarrollado por Pierre y Dina van Hiele a mediados del siglo XX. Este modelo describe la evolución del pensamiento geométrico a través de niveles jerárquicos y secuenciales, que explican cómo los estudiantes pasan del reconocimiento visual de las figuras a la comprensión profunda de sistemas deductivos complejos (Van Hiele, 1986).

Apoyo didáctico: Una de las contribuciones fundamentales del modelo radica en asumir que el aprendizaje geométrico no depende únicamente de la maduración cognitiva, sino sobre todo de la organización didáctica y del tipo de experiencias que se ofrecen al estudiante. Así, la enseñanza debe ser estructurada de modo que los contenidos, el lenguaje, las tareas y las interacciones pedagógicas se alineen con el nivel de razonamiento en el que se encuentra el aprendiz. Duval (2017) coincide en esta perspectiva al considerar que la comprensión geométrica requiere coordinar diferentes registros semióticos; los errores comunes provienen precisamente de exigir razonamientos formales a estudiantes que aún operan en niveles inferiores.

En lo que sigue, se detalla cada nivel del modelo, integrando aportes críticos de diversos autores y remarcando su relevancia para la enseñanza contemporánea.

Nivel 1: Visualización o reconocimiento
En el primer nivel, el estudiante reconoce las figuras por su apariencia global, sin atender a sus propiedades internas. Un cuadrado es "lo que parece un cuadrado", un triángulo es "una figura con punta arriba", y un cilindro es "una forma parecida a una lata".

Este reconocimiento se basa en y no en criterios matemáticos.

Según Duval (2017), en este nivel predomina la "aprehensión perceptiva" del objeto, y no su estructura. Por ello, los estudiantes pueden confundir figuras según su orientación, tamaño o color, o considerar que dos figuras son diferentes solo porque se presentan desde otra perspectiva.

La enseñanza en este nivel requiere actividades manipulativas, exploración de figuras, clasificación intuitiva, comparación por semejanza visual y uso del lenguaje cotidiano antes de introducir definiciones formales.

Nivel 2: Análisis
El segundo nivel se caracteriza por la identificación de propiedades de las figuras. El estudiante ya no solo reconoce una figura por su apariencia, sino que describe rasgos específicos: "tiene cuatro lados", "tiene ángulos rectos", "sus caras son rectángulos", etc.

Sin embargo, estas propiedades todavía se conciben de manera aislada, sin establecer relaciones entre ellas. Por ejemplo, una persona en este nivel puede saber que un cuadrado tiene lados iguales y ángulos rectos, pero no deduce que esto implica pertenecer también al conjunto de los rectángulos.

Tall (2014) denomina este estadio como un pensamiento donde lo visual comienza a dialogar con lo verbal, pero aún no se alcanza la comprensión de las interdependencias lógicas entre las propiedades.

La labor docente debe centrarse en:

- Describir figuras con precisión.
- Identificar y medir atributos.
- Comparar propiedades.
- Realizar construcciones simples.

Nivel 3: Ordenamiento o clasificación informal
En este nivel, el estudiante comprende las relaciones entre propiedades y consigue organizar las figuras en categorías jerárquicas.

Por ejemplo: Si una figura tiene cuatro lados y cuatro ángulos rectos, es un rectángulo; si sus lados son también iguales, pertenece a la subcategoría de los cuadrados. Este tipo de razonamiento implica inferencias lógicas simples y la capacidad de establecer inclusiones entre clases de figuras. Según Hershkowitz (2011), aquí surge el inicio de la estructura conceptual geométrica, donde las propiedades ya no se entienden de manera aislada, sino articuladas en redes de significados.

Un desafío frecuente es que muchos estudiantes no alcanzan este nivel porque la enseñanza salta directamente de nombres visuales a definiciones formales, sin ofrecer actividades de clasificación, argumentación y razonamiento informal.

Nivel 4: Deducción formal

El cuarto nivel marca la entrada plena en el pensamiento geométrico avanzado. En este nivel, los estudiantes comprenden que:

- Las definiciones están interconectadas,
- Los teoremas se derivan unos de otros,
- Un sistema geométrico se organiza a partir de axiomas,
- La demostración garantiza la validez universal de las afirmaciones.

Aquí emerge la capacidad de seguir y construir demostraciones, justificar propiedades, y entender que una figura puede definirse de varias formas equivalentes.

Tall (2014) considera este nivel como un tránsito hacia el "mundo formal" de la matemática, donde los objetos dejan de depender de la percepción y se transforman en entidades abstractas definidas por relaciones.

En términos pedagógicos, este nivel exige tareas que involucren:

- Secuencias de deducción.
- Análisis de contraejemplos.
- Validación de conjeturas.
- Ejercicios de demostración gradual.

Nivel 5 Razonamiento axiomático o rigor

El nivel más avanzado implica comprender y manejar sistemas axiomáticos completos, compararlos, analizarlos y reconstruirlos. El estudiante puede trabajar con geometrías alternativas , analizar la independencia de axiomas y construir sistemas equivalentes o contrastantes.

Apoyo didáctico: Este nivel no es propio de la educación básica, pero es esencial para la formación matemática avanzada, particularmente en carreras científicas. Autores como Manders (2008) y Netz (2004) han mostrado que este nivel de análisis coincide con el tipo de razonamiento practicado históricamente en la geometría griega, donde las figuras se convertían en soporte para inferencias abstractas.

Implicaciones didácticas

- La enseñanza debe alinearse al nivel donde se encuentra el estudiante, evitando exigir razonamientos formales cuando aún no se domina la organización conceptual previa.

- Las actividades deben transitar desde la manipulación y visualización hacia la clasificación y la deducción.
- El lenguaje matemático debe introducirse progresivamente, en articulación con registros visuales, verbales y simbólicos.
- La evaluación debe considerar no solo los resultados, sino la forma en que el estudiante justifica, organiza y conecta sus ideas.

Como señala Duval (2017), "el obstáculo mayor de la geometría no está en las figuras en sí, sino en los modos de representación que utilizamos para significarlas".

Conclusiones

El capítulo muestra que comprender la geometría exige mucho más que aplicar fórmulas o identificar figuras. A lo largo del análisis se evidencia que el razonamiento geométrico se construye cuando el estudiante aprende a relacionar distintas formas de representar el espacio, pasando de una observación inicial a una interpretación más profunda de las propiedades y estructuras. Esta perspectiva permite entender por qué ciertos conceptos, como área, volumen o perpendicularidad, generan dificultades persistentes: requieren coordinar ideas que no se desarrollan de manera espontánea.

También se señala que el progreso en el pensamiento geométrico depende de ofrecer experiencias de aprendizaje bien organizadas. El avance desde el reconocimiento visual hasta la deducción formal demanda actividades que permitan observar, analizar, clasificar, argumentar y, finalmente, justificar. Para ello se necesita una enseñanza que acompañe de manera gradual el desarrollo del razonamiento, respetando los ritmos de comprensión y fomentando la exploración crítica de las figuras y sus relaciones internas.

En conjunto, el capítulo concluye que la geometría debe enseñarse como un sistema de ideas interconectadas y no solo como un conjunto de procedimientos aislados. Comprender el espacio implica integrar intuición, visualización, análisis y razonamiento formal, de modo que el estudiante pueda desarrollar una mirada más coherente y creativa sobre las formas y sus relaciones. Al adoptar una perspectiva más reflexiva, la geometría se convierte en una herramienta para interpretar el mundo y en un medio para fortalecer un pensamiento matemático más sólido y significativo.

Referencias

Apostol, T. M. (1991). Calculus: one-variable calculus with an introduction to linear algebra (2.ª ed.). John Wiley & Sons.

Ausubel, D. P. (2000). The acquisition and retention of knowledge. Springer.

Brousseau, G. (2002). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Ciarlet, P. G. (2025). Linear and nonlinear functional analysis with applications (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9781611978247

Coxeter, H. S. M. (1963). Introduction to geometry (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics, 24(2), 139–162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Reidel.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry. National Council of Teachers of Mathematics.

Godino, J. D. (2005). Teoría de las funciones semióticas en didáctica de las matemáticas. Yupana: Revista de Educación Matemática, 1(2), 43–60. https://doi.org/10.14409/yu.v1i2.244

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Universidad de Granada.

Hartshorne, R. (2000). Geometry: Euclid and beyond. Springer.

Heath, T. L. (1956). The thirteen books of Euclid's Elements (2.ª ed.). Dover Publications.

Hershkowitz, R. (2011). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and cognition (pp. 70–95). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.006

Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1952). Geometry and the imagination. Chelsea Publishing.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on mathematical reasoning. ICMI Handbook of Mathematics Education, Springer.

Manders, K. (2008). Diagrammatic reasoning in Euclid. En P. Mancosu (Ed.), The philosophy of mathematical practice (pp. 65–80). Oxford University Press.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 41(4), 427–440. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0199-z

Mariotti, M. A., & Bussi, M. G. (2020). Semiotic mediation in the mathematics classroom. Springer.

McGee, D. (1999). Students' visualization of 3D shapes. Journal of Mathematical Behavior, 18(3), 299–311.

Netz, R. (2004). The shaping of deduction in Greek mathematics. Cambridge University Press.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. Theory Into Practice, 40(2), 118–127. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4002_6

Presmeg, N. (2020). Visualization and learning in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of mathematics education (pp. 825–829). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_167

Ruiz, A., & Álvarez, J. (2008). Trigonometría y razonamiento geométrico en estudiantes de secundaria. Revista de Educación Matemática, 22(3), 45–62.

Stewart, J. (2016). Calculus: Early transcendentals (8th ed.). Cengage Learning.

Tall, D. (2014). How humans learn to think mathematically. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Academic Press.

Capítulo IV

Razones e identidades trigonométricas y resolución de triángulos

Introducción

Hablar de trigonometría es hablar de un modo particular de comprender el espacio: no ya desde la figura estática, sino desde la relación que emerge al comparar longitudes, ángulos y variaciones. Mientras la geometría organiza la forma, la trigonometría organiza el cambio, la razón y la periodicidad. Históricamente nació del diálogo entre astronomía, navegación, agrimensura y cálculo de distancias inaccesibles; hoy, sin embargo, constituye un lenguaje transversal que articula modelos físicos, señales, oscilaciones, gráficos digitales y movimientos periódicos.

Autores como Maor (1998) recuerdan que la trigonometría es una de las pocas ramas de las matemáticas cuya historia está profundamente entrelazada con la observación del cielo. Los astrónomos griegos y árabes refinaron las razones trigonométricas no por curiosidad abstracta, sino para predecir trayectorias, calcular

ISBN 978-9942-596-46-8 | 2025
https://editorial.risei.org

eclipses y comprender la posición de los astros. En Oriente, matemáticos como Aryabhata y Bhāskara desarrollaron tablas de senos y senos que influirían siglos después en la obra de Regiomontano. Con el Renacimiento, la trigonometría dio un salto decisivo: se independizó de la astronomía y se consolidó como teoría matemática.

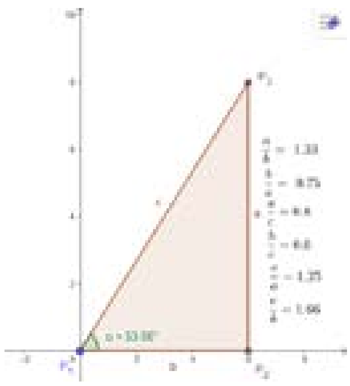
Pero, más allá de la historia, la trigonometría ha enfrentado dificultades didácticas persistentes. Tall (2013) y Weber (2006) advierten que existe un conflicto cognitivo entre la experiencia visual del ángulo, la razón numérica y la periodicidad. Para muchos estudiantes, el seno y el coseno son funciones “extrañas” porque no emergen de su experiencia cotidiana. De ahí que la enseñanza deba integrar la comprensión geométrica, la representación gráfica, el uso de simuladores y la interpretación contextualizada.

Este capítulo aborda la trigonometría desde esa mirada amplia: parte del triángulo rectángulo, se desplaza al círculo unitario, articula las identidades con su sentido geométrico y culmina con la resolución de triángulos y aplicaciones reales. El enfoque no se limita al cálculo: busca reconstruir la arquitectura conceptual que sostiene la disciplina y mostrar cómo los entornos digitales pueden transformar la experiencia de aprender trigonometría.

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

La enseñanza de las razones trigonométricas constituye uno de los momentos más significativos de la formación matemática en el nivel medio y superior. Aunque suele presentarse como un tema accesible su aparente simplicidad enmascara desafíos cognitivos profundos. Más allá de memorizar relaciones, el estudiante debe comprender que las razones trigonométricas no dependen del tamaño del triángulo, sino del ángulo que las determina, una idea que para el docente parece evidente, pero que para el aprendiz implica una ruptura conceptual con su percepción intuitiva del espacio.

Figura 1.
Representación comparativa de las funciones seno y coseno en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.



Nota: Elaboración propia.

Freudenthal (1973) señalaba que las matemáticas "solo tienen sentido cuando emergen de la realidad del estudiante" y que conceptos como el seno o el coseno no deberían enseñarse como abstracciones prematuras, sino como relaciones que el estudiante puede experimentar, manipular y verificar. Este enfoque, más fenomenológico y menos formalista, permite que la trigonometría se construya desde la acción, la visualización y el sentido, antes que desde la técnica.

Con esta premisa, el presente epígrafe desarrolla cuatro dimensiones complementarias que permiten comprender el origen, la función y el significado de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo:

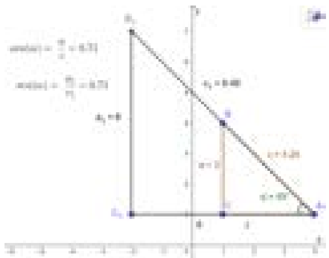
1. La invariancia como fundamento
2. Los registros semióticos y el problema de la coordinación
3. El potencial del ejemplo y la visualización dinámica
4. Hacia una comprensión relacional y funcional de la trigonometría.

La invariancia como fundamento conceptual

El corazón de las razones trigonométricas radica en la invariancia: para un ángulo agudo cualquiera, existe una relación constante entre ciertos lados del triángulo rectángulo, sin importar su tamaño o su orientación. Esta idea, que parece sencilla, pone en tensión la percepción natural del estudiante, quien suele asociar magnitudes visuales absolutas con magnitudes relacionales.

El hecho de que un triángulo crezca o se reduzca produce la impresión de que "todo cambia", cuando en realidad algo permanece idéntico: la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa (seno), entre el cateto adyacente y la hipotenusa (coseno) o entre catetos (tangente). Según Weber (2006), uno de los errores más persistentes en trigonometría consiste en "operacionalizar" las razones sin comprender que expresan una propiedad estructural del triángulo.

Figura 2.
Invariancia del seno de un ángulo en triángulos rectángulos semejantes.

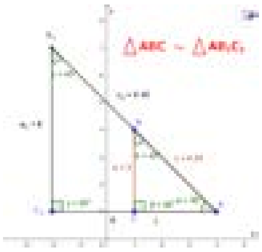


Nota: Elaboración propia.

Históricamente, este principio ya estaba presente en las construcciones geométricas de Hiparco y Menelao, cuyos trabajos evidenciaban que relaciones entre lados permanecían constantes para ángulos fijos (Maor, 1998). En esta tradición, la trigonometría se concibió no como un conjunto de definiciones, sino como un fenómeno de estabilidad geométrica.

Para el estudiante actual, este fenómeno rara vez se hace evidente si no se acompaña de experiencias manipulativas. Considérese un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°. Si se duplican todos sus lados, el cateto opuesto y la hipotenusa duplican su longitud, pero la razón permanece invariable. No obstante, esta idea desafía la percepción: el triángulo "parece" ser otro. Freudenthal argumenta que, sin una vivencia explícita de esta invariancia, el concepto se vuelve verbal, pero no significativo.

Figura 3.
Semejanza de triángulos y conservación de las razones trigonométricas.



Nota: Elaboración propia.

Aquí, la enseñanza puede apoyarse en tareas basadas en semejanza: dibujar triángulos de distintos tamaños, medir los cocientes, comparar resultados y reflexionar sobre lo que permanece y lo que cambia.

En este caso ambos triángulos son semejantes por tener dos ángulos respectivamente iguales (aa).

La invariancia no es un hecho que se memoriza, sino una experiencia intelectual que se reconoce.

Registros semióticos y dificultades cognitivas

Duval (1998) sostiene que la comprensión matemática profunda depende de la capacidad del estudiante para coordinar distintos registros semióticos:

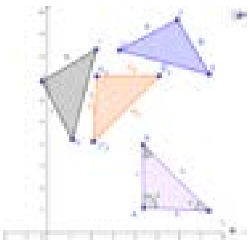
1. El gráfico (la figura),
2. El numérico (las medidas),
3. El simbólico-verbal (la razón expresada como $\sin\theta = \frac{a}{h}$.

Cuando uno de estos registros domina sobre los otros, emergen errores recurrentes. Por ejemplo, algunos estudiantes identifican el cateto opuesto basándose en su orientación vertical, no en su oposición frente al ángulo; otros manipulan las medidas sin interpretar la figura; otros aplican la fórmula correcta, pero en un triángulo distinto al que observan.

Esto se debe a que la escuela suele privilegiar el registro simbólico sin entrenar la correspondencia entre representación gráfica y expresión simbólica. El estudiante puede saber que "el seno es opuesto sobre hipotenusa", pero no saber identificar cuál es el opuesto cuando el triángulo está girado o cuando la figura es inusual.

Tall (2013) explica que el concepto de ángulo, aunque fundamental, es perceptivamente inestable: cambia visualmente según su orientación, forma y contexto. De ahí que identificar los lados relativos al ángulo constituya una de las barreras más persistentes en el aprendizaje de la trigonometría.

Figura 4.
Ejemplos de triángulos en posiciones no convencionales para fortalecer la identificación conceptual de las razones trigonométricas.



Nota: Elaboración propia.

Apoyo didáctico: este problema puede abordarse con ejercicios que presenten triángulos en posiciones no convencionales o incluso figuras donde el triángulo no es evidente a primera vista como rampas inclinadas, estructuras arquitectónicas, escaleras o planos topográficos para obligar al estudiante a reconstruir la figura conceptual antes de operar con ella.

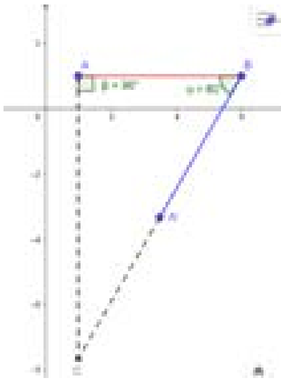
Tareas como "marque el cateto opuesto en diez triángulos rotados" parecen simples, pero cumplen una función decisiva: consolidan la relación entre geometría y lenguaje formal.

El potencial del ejemplo y la visualización dinámica

Los ejemplos contextualizados permiten que la trigonometría se comprenda como un sistema de relaciones aplicables a variaciones reales, y no como un artificio escolar. Un caso clásico es el del poste cuya sombra mide 4.6 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 41°. La tangente no es aquí un "cociente", sino la expresión de una relación entre la altura del poste y la distancia proyectada. El estudiante descubre que, detrás de un fenómeno cotidiano, subyace una estructura trigonométrica.

Otro ejemplo valioso consiste en explorar triángulos incompletos. Puede proponerse al estudiante imaginar un triángulo rectángulo donde solo se ve el cateto adyacente y parte de la hipotenusa. Aunque el triángulo no sea visible en su totalidad, las razones siguen siendo aplicables porque no pertenecen a la figura dibujada, sino a la estructura conceptual que la figura representa. Esta experiencia refuerza la idea de que la trigonometría es una lógica interna de las relaciones angulares y no una técnica dependiente del dibujo.

Figura 5.
Representación trigonométrica de un poste y su sombra para analizar la razón tangente.

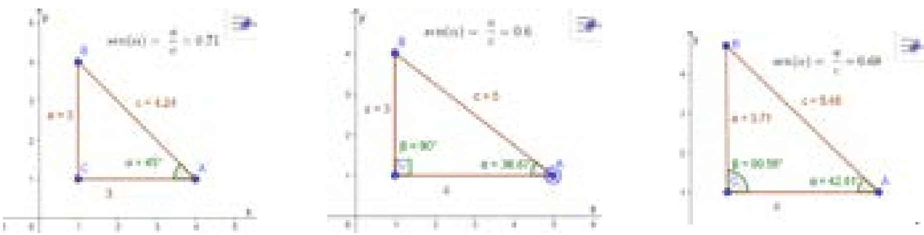


Nota: Elaboración propia.

La visualización dinámica amplifica estas experiencias. GeoGebra, más que una herramienta tecnológica, actúa como un mediador conceptual. Al mover un vértice (figura 6 a, b, c), el estudiante observa simultáneamente el cambio de los lados y la constancia de las razones.

Al rotar la figura, ve que el cateto opuesto cambia de posición perceptiva, pero no de función. La tecnología hace visible la estructura oculta que la percepción distorsiona. Tall (2014) afirma que la exploración dinámica favorece la formación de una "imagen conceptual robusta", capaz de integrar variación, invariancia y representación simbólica.

Figura 6
Variación dinámica de un triángulo rectángulo para observar la constancia de las razones trigonométricas.

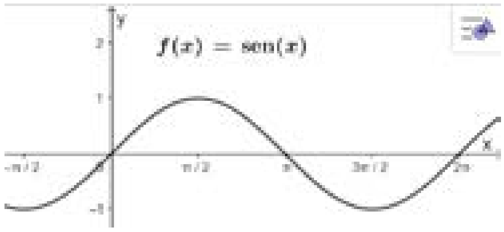


Nota: Elaboración propia.

Incluso es posible animar situaciones reales: un automóvil que asciende una pendiente, una escalera que se desliza sobre una pared, un dron que cambia su altura manteniendo el ángulo respecto al operador. En todas estas escenas, el triángulo rectángulo aparece como un modelo implícito, y las razones trigonométricas como las herramientas que explican las relaciones entre posiciones, distancias y ángulos.

Hacia una comprensión relacional y funcional de la trigonometría
Un desafío epistemológico aparece en el momento en que el seno deja de ser un cociente de catetos y pasa a concebirse como una función. Freudenthal (1973) criticaba que la escuela conduce a esta transición de manera abrupta: primero presenta el seno como "opuesto sobre hipotenusa", y de inmediato exige interpretarlo como un valor funcional definido para cualquier ángulo. Si el estudiante no ha comprendido la invariancia ni la relación entre el ángulo y los lados, esta transición se hace opaca.

Figura 7.
Representación gráfica de la función seno para evidenciar su comportamiento continuo y periódico.



Nota: Elaboración propia.

Comprender el seno como función implica reconocer que describe cómo varía una magnitud (proyección vertical de un punto en movimiento) cuando el ángulo cambia. Esta interpretación prepara al estudiante para conceptos posteriores: el círculo unitario, las identidades trigonométricas, las gráficas periódicas e incluso aplicaciones científicas como el análisis de ondas, la acústica, la óptica o los movimientos armónicos.

Weber (2006) señala que la trigonometría se vuelve comprensible cuando el estudiante logra conectar la razón del triángulo rectángulo con la variación continua del círculo. Pero esa conexión no es natural: se construye lentamente mediante experiencias relacionadas, exploraciones guiadas y explicitación progresiva de significado.

En consecuencia, enseñar razones trigonométricas no debe reducirse a un repertorio de definiciones, sino promover una comprensión relacional: la razón es una propiedad del ángulo, no del triángulo; una estructura invariante, no un valor arbitrario; un modelo de relación, no una operación.

Relaciones fundamentales y círculo trigonométrico
El paso desde el triángulo rectángulo al círculo trigonométrico constituye un salto conceptual decisivo, quizá el más importante en la transición entre una trigonometría basada en figuras

estáticas y una trigonometría concebida como una teoría de funciones. Este desplazamiento epistemológico no es trivial, pues exige abandonar la sensación de que seno, coseno o tangente son meros cocientes entre lados, para comprenderlos como medidas dinámicas asociadas a un movimiento angular.

A diferencia del triángulo, cuya definición depende de una configuración espacial particular, el círculo unitario ofrece un modelo unificado donde las razones trigonométricas adquieren su sentido más profundo: periodicidad, simetría, continuidad y variación. Como señala Maor (1998), "el círculo trigonométrico no es una extensión del triángulo: es su reformulación fundamental".

Fundamentos históricos y epistemológicos del círculo unitario

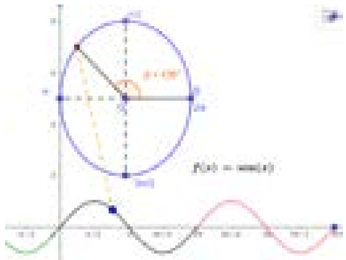
El origen histórico de la trigonometría está intrínsecamente vinculado al estudio del círculo y no al triángulo rectángulo. Ya en el siglo II a. C., Hiparco había desarrollado tablas de cuerdas en la circunferencia, relacionando longitudes y ángulos desde una perspectiva puramente circular. Esta línea de trabajo se consolidaría posteriormente con Ptolomeo, cuyo Almagesto se convirtió en la obra de referencia para la astronomía y la matemática durante más de mil años (Berggren, 2007).

Este dato histórico es pedagógicamente significativo: la trigonometría no nació como una colección de cocientes, sino como un estudio sistemático de la variación angular y la forma circular. El predominio escolar del triángulo rectángulo, aunque útil en términos de accesibilidad inicial, puede restringir la comprensión del estudiante si no se complementa con una progresión conceptual hacia el círculo unitario.

Freudenthal (1973), desde su visión realista de la matemática, sostiene que los conceptos deben surgir de fenómenos "experienciales" por el estudiante. El círculo unitario, precisamente, ofrece un fenómeno natural de movimiento uniforme: un punto que gira alrededor de un centro. Esta experiencia dinámica, aunque representada de manera digital o manipulativa permite comprender mejor la periodicidad y la continuidad que subyacen en las funciones trigonométricas.

Figura 8.

Relación dinámica entre el movimiento circular y la función seno para visualizar la periodicidad y continuidad trigonométrica.



Nota: Elaboración propia.

Desde el plano cognitivo, Tall (2014) señala que la transición desde la razón estática hacia la función dinámica constituye una ruptura conceptual: el estudiante debe abandonar la idea de que el seno es solo un cociente para comprender que es el valor de una función que depende exclusivamente del ángulo. Esta despersonalización del triángulo es necesaria para comprender las identidades trigonométricas, las gráficas, el círculo y las aplicaciones físicas.

Además, desde el análisis funcional, el círculo unitario introduce de manera natural los radianes. En lugar de memorizar equivalencias, el estudiante entiende que un radian es la longitud de arco correspondiente al ángulo central que intercepta un arco igual al radio. Esta interpretación es coherente con el movimiento y se integra sin artificios en el círculo unitario.

Periodicidad, continuidad y simetría: estructura conceptual del círculo

El círculo trigonométrico permite visualizar relaciones fundamentales que permanecen ocultas en el triángulo rectángulo.

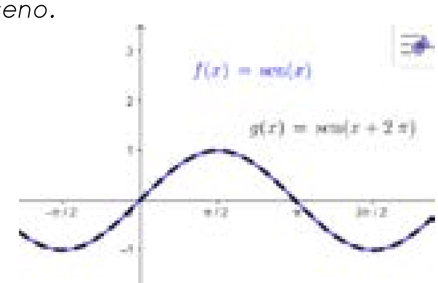
Periodicidad y movimiento

Al recorrer la circunferencia completa, el punto móvil regresa a la misma posición, lo que fundamenta la periodicidad de las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta, \ \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Figura 9.

Comparación gráfica de f(x)=sen(x) y g(x)=sen(x+2ϖ) para ilustrar la periodicidad del seno.



Nota: Elaboración propia.

Esta periodicidad no es una regla memorizada; es una consecuencia geométrica directa del movimiento circular.

Comprender este fenómeno desde la experiencia, por ejemplo, mediante animaciones en GeoGebra, permite desarrollar la intuición funcional. Duval (1998) afirma que la coordinación entre registros semióticos es central para interpretar la periodicidad: observar el punto en movimiento y la gráfica simultáneamente permite que el estudiante construya la relación entre posición angular y valor trigonométrico.

Continuidad y suavidad

La continuidad de las funciones trigonométricas es una propiedad derivada de la suavidad del movimiento circular. Cuando el punto avanza, el seno y el coseno cambian de manera progresiva y sin saltos. Este fenómeno marca la diferencia entre una trigonometría estática centrada en cálculos y valores aislados y una visión profundamente analítica donde la variación es central.

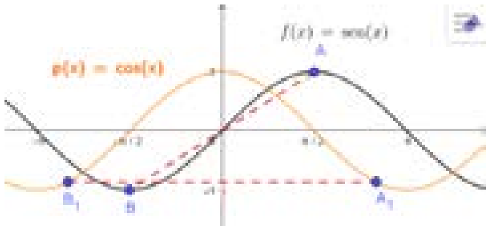
Esta comprensión es fundamental para el cálculo diferencial e integral, pues explica por qué las funciones trigonométricas son derivables y por qué sus derivadas exhiben periodicidad y simetría.

Simetrías fundamentales

Geométricamente se muestra las simetrías de las funciones trigonométricas:

El coseno es par: $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$.
El seno es impar: $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$.

Figura 10.
Representación gráfica de las simetrías del seno y del coseno para ilustrar su carácter impar y par, respectivamente.



Nota: Elaboración propia.

La simetría en 180° produce identidades como:

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta,\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

Arcavi (2003) destaca que comprender estas simetrías desde la figura y no desde la fórmula fortalece la visualización matemática, que es clave para reducir errores conceptuales y reforzar el razonamiento.

Proyecciones, coordenadas y significado geométrico

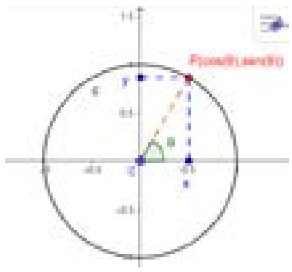
Comprender la circunferencia como un espacio de relaciones dinámicas transforma por completo la manera en que el estudiante se aproxima al seno, el coseno y la tangente. En los enfoques tradicionales estas funciones se presentan como cocientes entre lados, vinculadas a una figura estática que convierte el ángulo en un fragmento rígido de geometría escolar. Sin embargo, cuando la circunferencia y sus proyecciones entran en escena, las funciones trigonométricas revelan su sentido más profundo: son coordenadas que describen el movimiento, no simples razones.

Esta reconceptualización permite que el estudiante vincule la trigonometría con la geometría analítica, la representación cartesiana y la idea de variación continua. La circunferencia deja de ser un contorno para convertirse en un sistema de referencia, y el punto que se desplaza sobre ella ya no representa un "triángulo" imaginario, sino una posición en un movimiento circular cuyos valores se expresan en forma de coordenadas. Esta visión, históricamente presente en la obra de Euler y más recientemente desarrollada en enfoques didácticos contemporáneos (Tall, 2014), facilita un tránsito natural hacia el estudio de funciones periódicas, simetrías, proyecciones y fenómenos ondulatorios.

$$\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Desde un punto de vista geométrico, todo punto P ubicado en la circunferencia unitaria puede describirse mediante sus coordenadas (x, y). Cuando ese punto se genera a partir de un giro de medida ā alrededor del origen, las coordenadas adquieren un significado trigonométrico esencial: $\mathrm{P}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Figura 11.
Representación del punto $P(cos\theta, sen\theta)$ en la circunferencia unitaria para visualizar el significado geométrico de las razones trigonométricas.



Nota: Elaboración propia.

Esta igualdad, tan compacta como profunda, articula a la vez la geometría del círculo, la estructura analítica del sistema cartesiano y la variación angular. Como señala Maor (1998), en esta representación "la trigonometría alcanza su forma más elegante", pues seno y coseno dejan de depender de un triángulo particular y pasan a describir una relación universal entre ángulos y posiciones.

La noción de proyección es clave para comprender esta estructura. El coseno emerge como la proyección horizontal del punto sobre el eje x; el seno, como la proyección vertical sobre el eje y. No son longitudes arbitrarias, ni distancias absolutas: son sombras geométricas que el punto proyecta al desplazarse por la circunferencia. Esta metáfora que Duval (1998) denomina "coordinación de registros", permite vincular representación gráfica, lenguaje analítico y significado geométrico en un mismo acto perceptivo. El estudiante deja de memorizar grafías para empezar a interpretar el comportamiento de las funciones como resultado de cómo estas proyecciones crecen, decrecen, se anulan o cambian de signo.

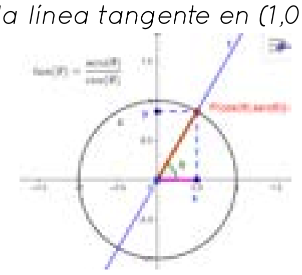
Apoyo didáctico: Esta reinterpretación tiene profundas implicaciones didácticas. Cuando seno y coseno se enseñan exclusivamente como cocientes, los estudiantes desarrollan concepciones fragmentadas: piensan en triángulos aislados, no en sistemas de variación. En cambio, cuando se introduce el círculo unitario y se hace visible la correspondencia entre ángulos, coordenadas y proyecciones, la trigonometría se convierte en un lenguaje visual y conceptual que explica comportamientos reales: oscilaciones, rotaciones, trayectorias, fenómenos periódicos. Como insisten Arzarello y Robutti (2001), la comprensión de las funciones trigonométricas se fortalece cuando el estudiante percibe el movimiento del punto y lo relaciona con valores numéricos y formas gráficas.

La tecnología potencia este proceso de manera notable. GeoGebra, Desmos y otros entornos dinámicos no solo "dibujan" la circunferencia, sino que permiten visualizar en tiempo real cómo las proyecciones horizontal y vertical varían a medida que

- El punto avanza. La animación revela que:
- El coseno alcanza su máximo en 0 radianes
- El seno aumenta hasta $\pi/2$
- Ambos se anulan en distintos puntos según la proyección correspondiente
- Y la tangente explota cuando la proyección horizontal se anula.

Estos fenómenos, que en la enseñanza tradicional suelen aparecer como hechos aislados, se integran en una narrativa geométrica coherente cuando el estudiante observa la relación funcional entre posición y proyección. Pierce (2010) sostiene que este tipo de experiencias tecnológicas contribuyen a la "flexibilización representacional", permitiendo que el estudiante transite sin rupturas entre lo visual, lo analítico y lo algebraico.

Figura 12.
Representación geométrica de la tangente en la circunferencia unitaria como pendiente de la recta que une el origen con $P(cos\theta, sen\theta)$ *y como intersección con la línea tangente en (1,0).*



Nota: Elaboración propia.

La tangente, por su parte, adquiere en este contexto una interpretación mucho más rica que la que ofrece el triángulo rectángulo. En el círculo unitario, la tangente representa la pendiente de la recta que une el origen con el punto móvil o, alternativamente, la intersección de esa recta con la línea tangente al círculo en el punto (1,0). Ambas interpretaciones, discutidas en profundidad por Weber (2006), permiten comprender por qué la tangente crece sin límite cerca de $\pi/2$: no se trata de una anomalía algebraica, sino del comportamiento natural de una pendiente que se aproxima a la vertical.

En síntesis, interpretar seno y coseno como coordenadas dinámicas no es un refinamiento conceptual, sino una reconstrucción completa del sentido de la trigonometría. Desde esta perspectiva, el círculo unitario deja de ser un artificio gráfico para convertirse en la representación más potente para entender la estructura profunda de las funciones trigonométricas y su papel en fenómenos reales. Los estudiantes que integran esta visión adquieren no solo habilidades de cálculo, sino una comprensión geométrica y analítica que les permite anticipar comportamientos, resolver problemas complejos y conectar la trigonometría con ideas fundamentales del análisis y la modelización científica.

Identidades trigonométricas básicas

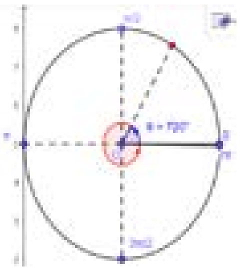
Las identidades trigonométricas básicas representan mucho más que una serie de igualdades útiles para resolver ejercicios. Constituyen una red conceptual que articula la geometría, el álgebra y el análisis, y que permite comprender la estructura profunda de la trigonometría como lenguaje del cambio y de la invariancia. En este sentido, su estudio revela un área privilegiada para analizar cómo se forma el pensamiento matemático avanzado, cómo interactúan distintos registros semióticos y cómo las representaciones geométricas se transforman en expresiones simbólicas.

Diversos autores han señalado que enseñar identidades únicamente como “fórmulas a memorizar” empobrece la matemática y obstaculiza la comprensión duradera (Weber, 2006; Tall, 2014). Desde una mirada crítica, este enfoque reduccionista ignora la carga epistemológica de las identidades: su origen geométrico, su carácter de propiedad universal y su papel como puente entre significados.

El círculo unitario como fundamento conceptual

El círculo unitario ha sido reconocido como el marco conceptual más potente para comprender las identidades trigonométricas. Históricamente, la trigonometría nació vinculada a triángulos y cuerdas, pero su consolidación moderna debe mucho a Euler quien vinculó seno y coseno a funciones periódicas y al análisis. Sin embargo, la representación dominante en la educación escolar siguió siendo el triángulo rectángulo, lo que —como advierte Maor (1998)— genera restricciones cognitivas: los estudiantes suelen creer que la trigonometría "solo funciona" en triángulos, que los ángulos deben ser positivos y agudos, y que las razones trigonométricas dependen de figuras específicas.

Figura 13.
Representación del movimiento angular continuo en el círculo unitario y su relación con la extensión de ángulos, coordenadas y periodicidad.



Nota: Elaboración propia.

Desde una perspectiva crítica, Tall (2014) sostiene que la comprensión profunda de la trigonometría se obstaculiza cuando el currículo fija el triángulo rectángulo como único punto de partida. Su concepto de three worlds of mathematics muestra que el paso del mundo encarnado (la figura) al mundo simbólico (la identidad) requiere estructuras conceptuales que el triángulo rectángulo no provee plenamente. El círculo unitario, por el contrario, permite que el estudiante vea:

- La continuidad del movimiento angular,
- La extensión a ángulos mayores que 90° o negativos,
- La relación entre coordenadas y funciones,
- La periodicidad como propiedad estructural.

Duval (1998), desde la teoría de los registros semióticos, enfatiza que el círculo unitario no es solo una figura, sino un sistema de representación que facilita la conversión entre lo gráfico y lo algebraico. La identidad pitagórica deja de ser una fórmula abstracta y se convierte en la ecuación del círculo, transformando la percepción del estudiante: ya no memoriza, sino que comprende un invariante geométrico.

Apoyo didáctico: autores como Godino, Batanero y Font (2007) proponen que la introducción de las identidades debe partir de la fenomenología del círculo unitario, porque permite reconstruir el significado ontosemiótico de las funciones trigonométricas: su existencia, representación, reglas de transformación y validación.

Una enseñanza basada en el círculo unitario, por tanto, no es solo un recurso visual: es una reconstrucción epistemológica que devuelve significado a la trigonometría.

Identidades pitagóricas, de simetría y recíprocas

Las identidades pitagóricas constituyen la columna vertebral de la trigonometría. Su importancia radica en que relacionan de manera estructural las funciones seno, coseno y tangente, sin necesidad de recurrir a triángulos particulares. Su validez es universal porque se derivan de la ecuación del círculo unitario.

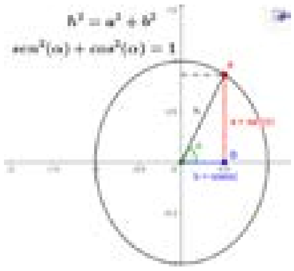
Identidad fundamental

$$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Esta igualdad expresa que la suma de los cuadrados de las proyecciones horizontal y vertical del punto (x, y) en el círculo es siempre 1. Es un invariante geométrico que no depende del ángulo ni de la posición.

Figura 14.

Representación geométrica de la identidad fundamental $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)$ en la circunferencia unitaria.



Nota: Elaboración propia.

Como argumenta Simmons (2016), esta identidad posee un rol regulador dentro del sistema trigonométrico: permite acotar valores, verificar coherencia en soluciones y enlazar la trigonometría con el álgebra y el cálculo. Cualquier error en una sustitución o manipulación suele manifestarse como contradicción de esta igualdad.

Identidades pitagóricas derivadas

A partir de la identidad fundamental y de las relaciones:

$$\tan(\theta) = \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}, \ \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}.$$

se obtienen las dos igualdades derivadas:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

La deducción es puramente algebraica, pero su interpretación geométrica es igualmente rica. Por ejemplo, la primera identidad se relaciona con la pendiente de la recta tangente a la circunferencia y con la proyección del punto a lo largo del eje vertical. Stewart (2016) señala que estas identidades son esenciales para comprender el comportamiento de las funciones trigonométricas en el cálculo integral y diferencial, pues articulan la tasa de cambio con la curvatura del círculo.

Tabla 1.
Identidades trigonométricas fundamentales y su interpretación geométrica.

Tipo de identidad	Identidad	Interpretación geométrica
Pitagórica	$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	Ecuación del círculo unitario
Pitagórica derivada	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	Relación entre pendiente y proyección horizontal
	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$	Relación entre inclinación e inversión del seno
Cocientes	$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$	Proyección vertical / proyección horizontal
	$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$	Recíproco de la tangente
Recíprocas	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	Inversión horizontal
	$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	Inversión vertical
Ángulo negativo	$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$	Seno es función impar
	$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$	Coseno es par
	$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$	Tangente es impar

Nota. Elaboración propia basada en la relación entre identidades trigonométricas y sus representaciones geométricas en el círculo unitario y en triángulos rectángulos.

Perspectiva didáctica: enseñar identidades desde la comprensión

La enseñanza de las identidades trigonométricas constituye un terreno fértil para explorar cómo los estudiantes transitan desde la mera evocación de fórmulas hacia una comprensión profunda de las relaciones matemáticas. En numerosos contextos escolares, las identidades se presentan como “reglas” que deben memorizarse para resolver ejercicios de simplificación o demostración, reproduciendo una tradición algorítmica que fragmenta el conocimiento y reduce la trigonometría a procedimientos sin sentido. Investigaciones recientes muestran que esta aproximación genera dificultades persistentes: errores conceptuales, confusiones entre función y razón, y una débil capacidad para justificar transformaciones

Esta perspectiva parte del reconocimiento de que las identidades son consecuencias lógicas de los modelos geométricos fundamentales: el triángulo rectángulo, el círculo unitario y la definición funcional de las razones trigonométricas. En este sentido, reconstruir con los estudiantes la génesis de las identidades permite activar procesos de razonamiento que van más allá de la manipulación simbólica. Tal como sostiene Duval (2017), la comprensión matemática auténtica se asienta en la coordinación entre múltiples registros de representación. Aplicado a las identidades, esto supone dialogar entre la figura geométrica, la expresión algebraica, la visualización dinámica y el comportamiento gráfico de las funciones, reconociendo que cada una ilumina aspectos distintos de la misma estructura conceptual.

Ejercicios para comprender, no para repetir

Desde esta mirada, es imprescindible que la tipología de ejercicios responda a la lógica de la comprensión y no al mecanicismo. Una propuesta didáctica sólida debería contemplar al menos cinco tipos de tareas que, articuladas entre sí, permitan avanzar desde la exploración intuitiva hacia la formalización rigurosa:

1. **Ejercicios de exploración visual**

Consisten en actividades donde los estudiantes manipulan representaciones dinámicas para observar cómo cambian las razones trigonométricas al variar el ángulo. Estas tareas permiten que las identidades "emerjan" como regularidades observables. Hohenwarter y Lavicza (2007) demostraron que este tipo de exploraciones aumenta la autonomía intelectual y la capacidad de formular conjeturas.

Por ejemplo, arrastrar un punto en el círculo unitario y registrar los valores de:

$$\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta) \text{ y } \tan(\theta)$$

conduce naturalmente a identificar que:

$$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

incluso antes de formalizar la identidad.

2. Ejercicios de reconstrucción geométrica

Estas actividades invitan a justificar la validez de una identidad a partir de un diagrama. Aquí el énfasis está en razonar: explicar por qué la identidad es verdadera. Ejemplos típicos incluyen:

- Demostrar la identidad pitagórica usando triángulos semejantes.
- Justificar las identidades de cociente a partir de las definiciones de razón trigonométrica en el círculo unitario.
- Explicar por qué $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ se deduce de dividir la identidad pitagórica entre $\cos^2\theta$

Este tipo de ejercicio responde a tareas de mediación semiótica, donde la figura actúa como puente entre el mundo visual y el simbólico.

3. Ejercicios de equivalencia conceptual

Su objetivo es que los estudiantes identifiquen si dos expresiones representan la misma identidad, aunque estén escritas de forma diferente. Este tipo de tarea favorece lo que Thompson (2016) denomina “coherencia estructural”, indispensable para consolidar la red de relaciones entre identidades. Algunos ejemplos:

- Determinar si $\frac{1}{\cos\theta}$ y $\cos\theta$ son equivalentes;
- Decidir si dos expresiones supuestamente distintas son transformaciones válidas de una misma relación trigonométrica;
- Comparar gráficos que representan la misma función escrita con identidades distintas.

4. Ejercicios de generalización y aplicación contextual

Aquí se integran problemas donde las identidades funcionan como herramientas para resolver situaciones más amplias: análisis de fenómenos periódicos, resolución de triángulos no rectángulos, estudio del movimiento armónico, entre otros. Estos ejercicios muestran que las identidades tienen un propósito más allá de la manipulación simbólica.

Ejercicios de demostración y argumentación simbólica

Finalmente, cuando el estudiante ya ha interiorizado las relaciones geométricas y las equivalencias conceptuales, puede abordar demostraciones que requieren dominio algebraico. La clave está en que estas demostraciones no se aprendan como secuencias memorizadas, sino como razonamientos justificables. Tchoshanov (2011) advierte que muchos errores provienen de tratar la identidad como un “procedimiento”, cuando en realidad es una afirmación universal que debe sostenerse bajo cualquier sustitución válida.

La propuesta de combinar estas cinco tipologías no apunta a fragmentar el aprendizaje, sino a construir una progresión coherente que inicie en la intuición, pase por la observación y llegue a la argumentación formal. En este sentido, el rol del docente es fundamental: debe orquestar la secuencia de tareas, ofrecer andamiajes temporales, promover el diálogo matemático y estimular la metacognición, especialmente cuando el estudiante enfrenta la necesidad de justificar por qué un paso algebraico es válido. La meta no es que se memoricen "todas las identidades", sino que se comprenda el sistema que las articula.

Cuando esto se logra, las identidades dejan de funcionar como obstáculos y se convierten en herramientas poderosas para analizar, modelar y resolver problemas. Más aún, el estudiante puede reconocer que detrás de cada expresión existe una idea geométrica profunda que da sentido a la matemática como una disciplina coherente, elegante y articulada.

Tabla 2.
Propuesta de ejercicios para enseñar identidades trigonométricas desde la comprensión

<table>
<tr><th>Tipología de ejercicio</th><th>Ejercicio propuesto</th></tr>
<tr><td>1. Ejercicios de exploración visual (GeoGebra / manipulaciones dinámicas)</td><td>1. Mover un punto sobre el círculo unitario y registrar valores de $\operatorname{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$ para distintos ángulos.
2. Observar cómo crece $\tan(\theta)$ al acercarse a los ángulos donde la función es indefinida.
3. Comparar en la misma vista los gráficos de $\operatorname{sen}(\theta)$, $\cos(\theta)$ y $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$
4. Manipular un triángulo rectángulo y verificar que las razones trigonométricas se mantienen para un mismo ángulo.
5. Superponer el triángulo rectángulo dentro del círculo unitario para visualizar la identidad pitagórica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sugerencia: Invitar a formular conjeturas antes de formalizar. Preguntar: "¿Qué patrón observas?" o "¿Qué crees que se mantiene constante al mover el punto?" para promover pensamiento inductivo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2. Ejercicios de reconstrucción geométrica</td><td>1. Demostrar la identidad pitagórica desde un triángulo rectángulo dibujado por el estudiante.
2. Construir un triángulo semejante que permita justificar $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
3. Explicar por qué $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ al dividir la identidad pitagórica entre $\cos^2\theta$
4. Representar un triángulo en el cuadrante II y analizar el signo de cada razón para justificar transformaciones.
5. Dibujar una circunferencia de radio r y argumentar por qué las identidades se mantienen tras un cambio de escala.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sugerencia: Manipular un triángulo rectángulo y verificar que las razones trigonométricas se mantienen para un mismo ángulo.
5. Superponer el triángulo rectángulo dentro del círculo unitario para visualizar la identidad pitagórica.</td></tr>
<tr><td>3. Ejercicios de equivalencia conceptual</td><td>1. Determinar si $1/\sec\theta$ es equivalente a $\cos(\theta)$.
2. Comparar si $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\tan(\theta)$ pueden usarse indistintamente en una expresión dada.
3. Identificar si dos expresiones complejas representan la misma identidad escrita en forma distinta.
4. Verificar si una gráfica dada corresponde a
o a una de sus transformaciones equivalentes.
5. Determinar qué expresiones son idénticas al cuadrado de una razón trigonométrica dada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sugerencia: Fomentar el uso de contraejemplos: “Si crees que son equivalentes, ¿puedes elegir un valor θ que lo confirme? ¿Y uno que lo contradiga?” Esto fortalece la comprensión del dominio.</td></tr>
<tr><td>4. Ejercicios de generalización y aplicación contextual</td><td>1. Utilizar identidades para modelar la sombra proyectada de un objeto en un problema realista.
2. Analizar un fenómeno periódico y describir qué identidades permiten simplificar el modelo trigonométrico.
3. Aplicar $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ para deducir una expresión en un triángulo no rectángulo mediante ley de senos o cosenos.
4. Emplear identidades para simplificar una expresión en un problema de ondas o vibraciones.
5. Utilizar una identidad para determinar la altura de un punto observado desde dos ángulos distintos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sugerencia: Guiar con preguntas situadas: “¿Qué expresión sería más fácil de manipular?”, “¿Qué identidad te ayuda a reducir el problema?”. Invitar a justificar la elección.</td></tr>
</table>

5. Ejercicios de demostración simbólica y manipulación algebraica	1. Demostrar que $\sec\left(\theta\right)-\cos\left(\theta\right)=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\sec(\theta)+\cos(\theta)}$ 2. Mostrar que $\frac{1-\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ usando identidades conocidas. 3. Probar que $\operatorname{sen}(\theta)\csc(\theta)=1$ bajo cualquier valor permitido de θ 4. Simplificar una expresión compleja usando únicamente transformaciones válidas de identidades básicas. 5. Verificar que dos expresiones aparentemente distintas son equivalentes transformándolas paso a paso.
Sugerencia: Recomendar que cada paso vaya acompañado de un breve comentario escrito: "aquí aplico esta identidad", "aquí sustituyo esta equivalencia". Esto fortalece la argumentación matemática.	

Nota. Elaboración propia

Algunas aplicaciones de la trigonometría en la vida cotidiana y las ciencias

La trigonometría constituye uno de los lenguajes matemáticos universales para describir, analizar y modelar fenómenos naturales y sociales. Su fuerza radica en la capacidad de articular tres ideas fundamentales: variación, periodicidad y relación angular. Aunque suele enseñarse de manera abstracta, desligada de su contexto histórico y de sus múltiples usos contemporáneos, sus aplicaciones atraviesan casi todas las disciplinas: desde la ingeniería y la arquitectura hasta la biología, la música, la informática y las ciencias de la tierra.

Como señala Maor (1998), la trigonometría "refleja el esfuerzo humano por comprender las regularidades del mundo", y esta comprensión se ha ido transformando, desde las primeras observaciones astronómicas hasta la modelación digital del siglo XXI. En este sentido, comprender sus aplicaciones no es un añadido decorativo, sino la clave para que el estudiante perciba la trigonometría como un sistema significativo, anclado en problemas genuinos que trascienden el aula.

Trigonometría en la medición: topografía, cartografía y geodesia

Medición directa e indirecta en la vida cotidiana

La medición indirecta es, sin duda, una de las aplicaciones más antiguas, prácticas y persistentes de la trigonometría. Mucho antes de que las funciones trigonométricas adquirieran su formalismo moderno, diversos pueblos ya empleaban procedimientos basados en triángulos semejantes para estimar alturas, distancias y profundidades sin necesidad de acceder físicamente al objeto. Esta forma de medir que consiste en calcular lo desconocido a partir de lo observable revela la esencia misma de la trigonometría: un puente entre experiencia y razonamiento geométrico, entre el mundo sensible y la abstracción matemática.

Desde una perspectiva histórica, se sabe que los egipcios utilizaban relaciones geométricas para determinar la pendiente de las pirámides, mediante la razón llamada seked, que no es sino el antecedente de la tangente moderna (Maor, 1998). De manera similar, los griegos empleaban instrumentos rudimentarios para medir sombras y obtener proporciones que permitieran estimar alturas inaccesibles. Tales prácticas evidencian que la medición indirecta surgió de necesidades concretas y no de especulación teórica: construir, orientar, navegar, delimitar territorios, resolver problemas de la vida diaria.

En la actualidad, aunque los instrumentos tecnológicos son más sofisticados, por ejemplo: clinómetros digitales, telémetros láser, estaciones totales; la lógica geométrica subyacente permanece inalterada. Como explica Stewart (2016), "la trigonometría aplicada mantiene siempre el mismo corazón: el triángulo como modelo de relación entre magnitudes". Esto permite comprender por qué la medición indirecta continúa siendo una habilidad fundamental en profesiones tan diversas como la arquitectura, la ingeniería civil, la topografía, la geología, la física y la astronomía.

La idea básica es plantear un triángulo donde una magnitud desconocida se vincule con otras accesibles mediante razones trigonométricas. Así, medir una sombra, un ángulo de elevación o la longitud de una base observable permite reconstruir la dimensión buscada. Este proceso se fundamenta en:

- Las propiedades de semejanza,
- La definición funcional de seno, coseno y tangente,
- La Ley de Senos y la Ley de Cosenos cuando el triángulo no es rectángulo.

Por ejemplo, medir la altura de un edificio mediante la tangente no es un truco escolar, sino la aplicación directa del triángulo rectángulo formado por:

1. La altura desconocida,
2. La distancia horizontal medida,
3. La línea de visión.

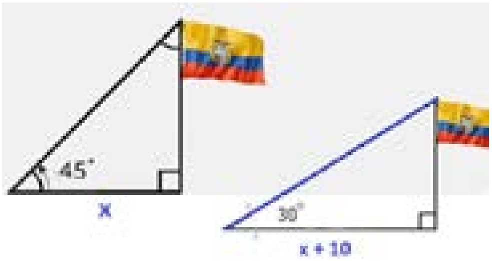
Este modelo, aparentemente simple, es extraordinariamente versátil: permite medir desde la anchura de un río hasta la profundidad de un barranco, pasando por la altura de una antena, la distancia a un árbol o la inclinación de un tejado.

Estimación de una altura urbana

Ejemplo 1: Imaginemos a un estudiante que desea medir un bloque de apartamentos sin disponer de una cinta métrica de gran longitud. Al ponerse a 50 metros y medir un ángulo de elevación de 36°, puede aplicar: $\mathbf{h = d \cdot \tan(\theta) = 50 \cdot \tan(36^\circ) \approx 36.3\,m}$.

Ejemplo 2: Durante una actividad de medición en clase de matemáticas, los estudiantes deben calcular la altura de una asta de bandera en el patio de su colegio. Desde un punto A, miden un ángulo de elevación de 45 grados hacia la punta del asta. Luego, retroceden 10 metros y desde un punto B, miden un nuevo ángulo de elevación de 30 grados.

Figura 15.
Representación geométrica del problema de medición de la altura del asta utilizando ángulos de elevación de $45^\circ y 30^\circ$.



Nota: Elaboración propia.

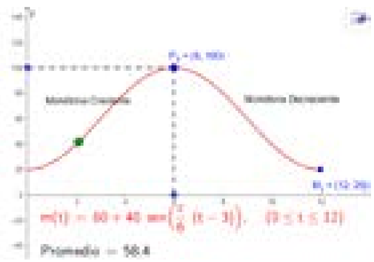
Se pide calcular la altura del asta utilizando trigonometría.

Ejemplo 3: Durante la feria escolar, el área de Matemáticas instaló un stand interactivo para atraer la atención de los estudiantes. Se observó que el número de visitas por hora no era constante, sino que seguía un comportamiento periódico a lo largo del día. El flujo de estudiantes puede describirse mediante la función:

$$m\left(t\right) = 60 + 40\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\left(t-3\right)\right)\ 0 \le t \le 12$$

donde m(t) es el número de visitas por hora y t es el tiempo en horas medido desde la apertura del stand (t=0).

Figura 16.
Representación gráfica de la función m(t) para analizar el flujo periódico de estudiantes en el stand matemático.



Nota: Elaboración propia.

a. Determina a qué hora ocurre el primer pico de visitas y cuántas visitas por hora se esperan en ese momento.
b. Determina a qué hora ocurre el mínimo de visitas y el valor correspondiente.

c. Determina en qué intervalos de tiempo la función m(t) es creciente y en cuáles es decreciente.
d. Demuestre gráficamente cómo se comporta el promedio de visitas por hora durante las 12 horas de funcionamiento del stand

Medición de pendientes y accesibilidad
La normativa de accesibilidad exige rampas con pendientes máximas específicas. Un docente puede mostrar cómo: $\mathbf{pendiente} = \mathbf{tan}(\theta)$ permite verificar si una rampa es adecuada midiendo solo la altura y la distancia horizontal. Este tipo de aplicación conecta la trigonometría con decisiones urbanísticas y con la inclusión social.

Triangulación: el corazón de la topografía
La triangulación consiste en dividir un territorio en triángulos cuyas distancias y ángulos pueden calcularse mediante leyes de senos y cosenos. Snellius fue uno de los primeros en usar estos métodos para medir la curvatura terrestre en 1617, un hito que marcó la transición hacia una geografía científica (Maor, 1998).

Ejemplo 4: Determinar la distancia entre dos colinas sin acceder a ellas

Se mide una base AB de 120 m y los ángulos hacia las colinas $\mathrm{C\ y\ D}$: $\angle \mathrm{A} = 42^\circ$ y $\angle \mathrm{B} = 83^\circ$

La distancia AC se estima usando la Ley de Senos:

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{sen}(83^\circ)} = \frac{120}{\mathrm{sen}(55^\circ)} \Rightarrow \mathrm{AC} \approx 119.4\,\mathrm{m}$$

Estos cálculos son base para:
- Delimitar parcelas,
- Construir carreteras,
- Evaluar impacto ambiental,
- Modelar zonas de riesgo volcánico.

Aunque estos ejemplos son comunes, investigaciones muestran que los estudiantes rara vez perciben la utilidad de la trigonometría en el mundo real. Duval (1998) explica que el problema reside en la desconexión entre registros: se enseñan procedimientos, pero no se articulan con la experiencia visual o corporal del espacio.

Freudenthal (1973) añade que la matemática escolar debe reconstruirse desde situaciones significativas; de lo contrario, se convierte en un conjunto de reglas arbitrarias. En este sentido, actividades prácticas no son “manualidades”, sino experiencias esenciales para romper la inertización de la trigonometría como “cálculo vacío”.

Trigonometría en física: ondas, vibraciones y señales

La ecuación general de una onda armónica: f(t)=Asen(āt+ā) se ha consolidado como uno de los modelos matemáticos más potentes para describir procesos periódicos en física. En ella, la amplitud A, la frecuencia angular ā y la fase inicial ā codifican información clave sobre la energía del sistema, la rapidez con que oscila y el modo en que se sincroniza con otras oscilaciones. Cada uno de estos parámetros tiene un correlato físico claro, lo que convierte a la función seno en un puente directo entre la expresión algebraica y la experiencia experimental (Tipler & Mosca, 2008).

Este modelo armónico se utiliza para describir una gran variedad de fenómenos:

- Osciladores mecánicos, como el sistema masa-resorte o el péndulo simple.
- Ondas sonoras, que se propagan en medios elásticos.
- Vibraciones sísmicas, que recorren el interior de la Tierra.
- Campos electromagnéticos, cuya oscilación explica desde la luz visible hasta las microondas.
- Señales en telecomunicaciones, análogas y digitales, donde las ondas se modulan para transportar información.

En el terreno de la mecánica, el análisis de pequeños desplazamientos alrededor del equilibrio muestra que muchas ecuaciones de movimiento pueden aproximarse por la ecuación del oscilador armónico simple. Tipler y Mosca (2008) destacan que, en este régimen lineal, la respuesta del sistema es prácticamente sinusoidal, de modo que la trigonometría no aparece como un artificio formal, sino como la forma natural de describir cómo responde la materia cuando se la perturba ligeramente.

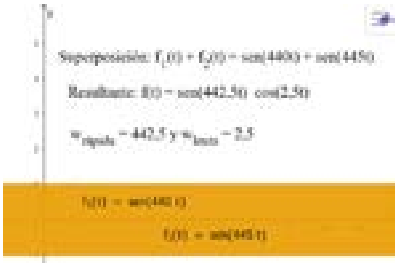
En acústica, la sinusoide adquiere un papel central. Rossing (2002) subraya que cualquier sonido complejo como por ejemplo: una nota musical, una sílaba pronunciada, el ruido de la ciudad, puede descomponerse en una suma de ondas sinusoidales con distintas frecuencias y amplitudes. Esta idea, heredera del trabajo de Fourier, permite analizar el timbre de los instrumentos, diseñar filtros electrónicos, comprimir archivos de audio y estudiar la contaminación sonora con herramientas matemáticas finas. La función seno deja de ser entonces una curva abstracta para convertirse en la huella matemática del sonido que escuchan nuestros estudiantes.

Ejemplo 5: Interferencia de ondas sonoras

Dos fuentes sonoras emiten ondas armónicas puras de frecuencias muy próximas.

Sus funciones de onda (en función del tiempo t) pueden modelarse como: $f_1 = \text{sen}(440t),\ f_2 = \text{sen}(445t)$

Figura 17.
Visualización de la interferencia entre dos ondas sonoras de frecuencias cercanas y su resultante modulada.



Nota: Elaboración propia.

a. Escribe la expresión de la onda resultante f(t) producida por la superposición de ambas.
b. Utiliza la identidad trigonométrica $\text{sen}\,a + \text{sen}\,b = 2\,\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ para mostrar que la señal resultante corresponde a una oscilación rápida modulada por una variación lenta de amplitud (batidos).
c. Identifica la frecuencia "rápida" y la frecuencia de batido.

Este fenómeno se usa en afinación musical, acústica arquitectónica y análisis de vibraciones y el estudiante puede comprobar que:

- La suma de dos ondas seno de frecuencias muy cercanas puede reescribirse como el producto de: una onda rápida de frecuencia media, y un coseno de frecuencia igual a la mitad de la diferencia, cuya envolvente genera los batidos.
- La interferencia de las ondas de 440 y 445 da lugar a un sonido cuya intensidad sube y baja aproximadamente 5 veces por segundo, fenómeno usado en afinación de instrumentos y en análisis de vibraciones.

Algo similar ocurre en sismología. Las vibraciones generadas por un terremoto se registran en forma de señales que, al ser analizadas, se descomponen en paquetes de ondas con estructuras casi sinusoidales. Stein y Wysession (2003) muestran cómo el estudio detallado de esas frecuencias y de su atenuación permite inferir propiedades de la corteza y el manto terrestres, localizar epicentros y estimar la magnitud de los eventos sísmicos. La trigonometría proporciona así un lenguaje para leer lo que ocurre a decenas o cientos de kilómetros bajo nuestros pies.

En el campo de la electromagnética, las ecuaciones de Maxwell describen campos eléctricos y magnéticos que se propagan en forma de ondas. Griffiths (2017) explica que, en ausencia de fuentes, las soluciones más simples de estas ecuaciones son ondas planas sinusoidales, que viajan a la velocidad de la luz. A partir de este modelo se construyen las teorías y los dispositivos que permiten comprender desde la propagación de la luz en fibras ópticas hasta el funcionamiento de antenas y sistemas de comunicación inalámbrica. La misma estructura $A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ está detrás del diseño de láseres, radares y enlaces satelitales.

Cuando se pasa al terreno de las señales discretas y las comunicaciones modernas, la presencia de la sinusoide es igual de evidente. Muchas técnicas de modulación: de amplitud, de frecuencia o de fase; se basan en manipular los parámetros de una onda portadora sinusoidal para codificar información. La estabilidad de esta forma de onda, su facilidad para ser generada y filtrada y su tratamiento analítico mediante herramientas como la transformada de Fourier justifican su predominio en sistemas analógicos y digitales (Rossing, 2002; Griffiths, 2017).

Todo esto otorga a la trigonometría un enorme potencial formativo. Tall (2014) defiende que la comprensión genuina de las funciones sinusoidales permite al estudiantado dar un salto desde un pensamiento geométrico, ligado a triángulos y círculos, hacia un pensamiento funcional en el que se reconocen patrones de variación, periodicidad y simetría. Cuando el alumnado observa que una misma ecuación describe la vibración de una cuerda, la propagación de la luz o la transmisión de datos en un teléfono móvil, la matemática deja de ser un conjunto de técnicas desconectadas y se percibe como un sistema coherente de modelos para interpretar la realidad.

En este sentido, trabajar en el aula con ejemplos de osciladores mecánicos, simulaciones de ondas sonoras, registros sísmicos reales o visualizaciones de campos electromagnéticos no solo contextualiza la función seno, sino que contribuye a construir una imagen más integrada de la ciencia.

Corriente alterna y fasores

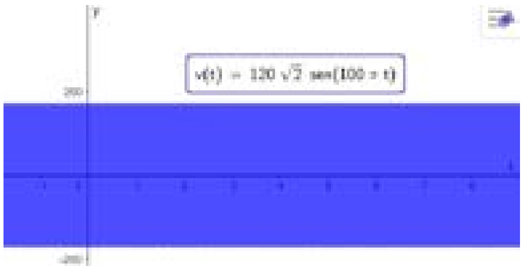
La trigonometría ocupa un lugar central en el análisis de corriente alterna (CA) debido a que las magnitudes eléctricas fundamentales: voltaje, corriente y potencia instantánea; presentan un comportamiento oscilatorio que puede describirse mediante funciones sinusoidales. Cuando un sistema eléctrico opera con una frecuencia determinada, sus variaciones periódicas de voltaje se representan comúnmente con ecuaciones del tipo $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, en las que la fase y la amplitud determinan tanto la forma como la intensidad de la señal. Este modelo, aparentemente sencillo, permite estudiar fenómenos como la transferencia de energía, la respuesta del sistema ante cargas resistivas o reactivas y la relación entre tensión y corriente en circuitos lineales.

Desde el punto de vista formativo, comprender la dinámica de la corriente alterna implica algo más que aplicar fórmulas: requiere interpretar cómo los ángulos determinan los desfases entre señales, cómo el coseno del ángulo de fase afecta la potencia activa o cómo la impedancia combina componentes resistivas y reactivas. En este sentido, Tall (2014) subraya que la transición del mundo visual al simbólico es fundamental para que el estudiante comprenda la estructura periódica de los fenómenos eléctricos.

Asimismo, investigaciones como las de Duval (1998) y Godino, Batanero y Font (2007) muestran que, al integrar registros gráficos (diagramas fasoriales), algebraicos (números complejos) y verbales (explicaciones de fase y amplitud), los futuros ingenieros desarrollan una comprensión más robusta del comportamiento oscilatorio de los sistemas eléctricos y logran percibir la trigonometría no solo como un conjunto de relaciones, sino como un lenguaje que organiza y explica la dinámica profunda de la corriente alterna.

Ejemplo 6: Desfase entre voltaje y corriente
Se conecta un circuito formado por una resistencia de $\mathrm{R} = 40\Omega$ y una bobina ideal con inductancia $\mathrm{L} = 0{,}16\ \mathrm{H}$ en serie a una fuente de corriente alterna de $\mathrm{v(t)} = 120\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi \mathrm{t})$

Figura 18.
Representación temporal del voltaje aplicado en el circuito RL para analizar la impedancia y el desfase.



Nota: Elaboración propia.

a. Determina la impedancia fasorial total del circuito.
b. Calcula la corriente eficaz que circula.
c. Halla el ángulo de desfase entre el voltaje y la corriente, e interpreta el resultado.

Este ejercicio ayuda a que el estudiante vea la trigonometría como algo vivo y conectado con fenómenos reales, y no solo como un conjunto de fórmulas. Al trabajar con fasores y analizar cómo se comportan el voltaje y la corriente en un circuito, el alumno descubre que los ángulos, las fases y las razones trigonométricas tienen un sentido físico claro. Además, al combinar dibujos, cálculos y explicaciones, se fortalece la comprensión desde varios modos de representación, algo fundamental para evitar que el estudio de la CA se vuelva puramente mecánico.

Aplicaciones biológicas, fisiológicas y ambientales.
Los ritmos biológicos forman parte esencial del funcionamiento de los organismos vivos. Desde el ciclo sueño–vigilia hasta las variaciones diarias de la temperatura corporal, una gran parte de estos procesos puede describirse mediante funciones periódicas, lo que permite analizar su comportamiento con herramientas trigonométricas. Los estudios sobre ritmos circadianos muestran que estas oscilaciones siguen patrones bastante estables, vinculados a cambios ambientales como la luz, la temperatura y la alimentación. Tal regularidad, como señalan Ahrens (2012) y Crowley (2015), facilita el uso de modelos senoidales para comprender la dinámica de la actividad metabólica, hormonal y neurológica.

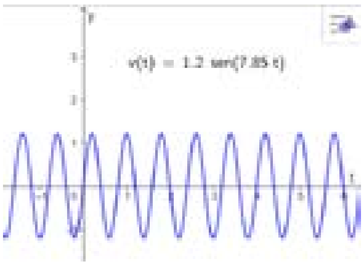
En el ámbito de la fisiología, la trigonometría también resulta clave para interpretar señales eléctricas del cuerpo humano, especialmente las relacionadas con el corazón y el cerebro. El electrocardiograma (ECG) y las ondas cerebrales registradas por electroencefalografía (EEG) presentan formas periódicas que se analizan mediante funciones seno–coseno, transformaciones armónicas y descomposición en frecuencias. Herreros y Martín (2015) muestran que estos modelos ayudan no solo a visualizar el ritmo de los impulsos eléctricos, sino también a identificar alteraciones que pueden indicar arritmias, apnea del sueño o disfunciones neurológicas. Aquí, la trigonometría actúa como un traductor: convierte señales biológicas complejas en patrones matemáticos que permiten tomar decisiones clínicas.

Apoyo didáctico: estos ejemplos permiten mostrar al estudiante que las funciones trigonométricas no solo describen ondas y fenómenos físicos, sino que forman parte del lenguaje con el que se estudian procesos vitales. Al conectar matemática y biología, se favorece una comprensión más integrada del mundo natural, superando la idea de la trigonometría como un tema puramente abstracto. Estudios de Tall (2014) y Freudenthal (1973) insisten en este punto: el aprendizaje significativo emerge cuando el alumno puede relacionar estructuras matemáticas con fenómenos reales que tienen sentido para él.

Imaginemos el registro del ritmo cardíaco de una persona en reposo. Al analizar el electrocardiograma durante unos segundos, se observa que los latidos siguen un patrón bastante regular: cada 0,8 segundos aparece un nuevo pico, lo que corresponde a unos 75 latidos por minuto. Para estudiar esa periodicidad, podemos aproximar matemáticamente la señal con una función senoidal del tipo: $f(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$, donde A representa la amplitud de la señal (la intensidad del impulso eléctrico), ω es la frecuencia angular y ϕ permite ajustar el punto de inicio.

Si la frecuencia cardíaca es de 75 latidos por minuto, equivalentes a 1,25 latidos por segundo, entonces: $\omega = 2\pi(1{,}25) \approx 7{,}85\ \text{rad/s}$. Una función posible para modelar este ritmo es: $f(t) = 1{,}2\,\text{sen}(7{,}85t)$, donde la amplitud 1,21,21,2 representa unidades arbitrarias asociadas al voltaje registrado en el ECG. Aunque se trata de una simplificación la señal real incluye picos, mesetas y variaciones, esta aproximación senoidal permite estudiar el ritmo cardíaco en su dimensión periódica.

Figura 19.
Modelación senoidal del ritmo cardíaco a partir de la frecuencia de 75 latidos por minuto.



Nota: Elaboración propia.

Desde el punto de vista biológico, este tipo de modelos es útil para identificar alteraciones en la frecuencia o variaciones anormales del periodo, que pueden ser indicadoras de estrés, arritmias o trastornos del sueño. Herreros y Martín (2015) explican que, al comparar la señal real con su ajuste senoidal, es posible detectar irregularidades que serían difíciles de apreciar a simple vista. Y desde la matemática, el ejercicio permite mostrar con claridad cómo una función trigonométrica describe un proceso vital: cada oscilación del seno corresponde a un latido, cada periodo refleja el ritmo del corazón y cada cambio en la amplitud o frecuencia se asocia con un comportamiento fisiológico diferente.

Ciclos climáticos y geofísicos

Muchos fenómenos climáticos presentan patrones de variación periódica que pueden modelarse mediante funciones trigonométricas. La temperatura diaria, por ejemplo, sigue una curva suavemente oscilante influida por la rotación terrestre y la radiación solar, lo que permite representarla mediante funciones seno o coseno con ligeras variaciones estacionales. Del mismo modo, las mareas producto de la interacción gravitatoria entre la Tierra, la Luna y el Sol responden a combinaciones de ciclos senoidales cuyo análisis ha sido fundamental para la navegación y la predicción costera (Ahrens, 2012). Incluso fenómenos como las estaciones del año y la variación anual de precipitaciones pueden aproximarse mediante modelos periódicos que permiten estudiar tendencias a largo plazo, identificar anomalías y prever comportamientos esperados en determinados meses.

En el ámbito geofísico, las oscilaciones periódicas también desempeñan un papel crucial. Los registros sísmicos, por ejemplo, incluyen señales oscilatorias que se analizan mediante descomposición armónica para identificar frecuencias dominantes y posibles patrones precursores de actividad tectónica. Investigaciones recientes muestran que ciertos tipos de vibraciones subterráneas como el llamado "ruido sísmico", pueden representarse mediante combinaciones de funciones senoidales que ayudan a caracterizar la estructura interna de la corteza terrestre (Nakata & Nishida, 2017). Desde una perspectiva educativa, estos fenómenos permiten mostrar al estudiante cómo las funciones trigonométricas articulan patrones que van más allá de la geometría y se convierten en herramientas para interpretar el comportamiento dinámico de la Tierra y su sistema climático, conectando la matemática con el estudio responsable del ambiente.

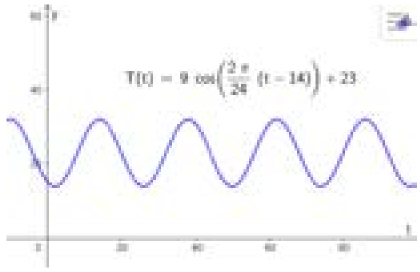
Consideremos la variación diaria de la temperatura en una ciudad costera. Si se registra la temperatura cada hora a lo largo de varios días y se observa que el máximo suele alcanzarse cerca de las 14:00 y el mínimo alrededor de las 5:00, es posible aproximar este comportamiento mediante una función del tipo:

$$\mathrm{T(t)} = 9\cos\left(\frac{2\pi}{24}(\mathrm{t}-14)\right) + 23,$$

donde $\mathrm{T(t)}$ representa la temperatura en grados Celsius y t es la hora del día.

En este modelo, los valores 23 y 9 indican, respectivamente, la temperatura promedio del día y la amplitud del ciclo térmico. Esta representación senoidal permite estudiar cómo los días excepcionalmente cálidos o fríos se alejan de la oscilación típica, y ayuda a comparar comportamientos en distintas épocas del año. Como explica Ahrens (2012), este tipo de modelos no pretende capturar todos los detalles del clima, pero sí hace posible identificar tendencias, contrastar ciclos y comprender por qué ciertas horas se sienten más calientes o frías.

Figura 20.
Función cosenoidal que modela la variación diaria de la temperatura en una ciudad costera.



Nota: Elaboración propia.

Este tipo de análisis, utilizado en estaciones oceanográficas, permite anticipar mareas altas que pueden afectar actividades portuarias, pesca artesanal o zonas susceptibles de inundación. Investigaciones geofísicas como las de Nakata y Nishida (2017) muestran que esta misma lógica armónica se emplea para estudiar vibraciones internas de la Tierra y comprender procesos tectónicos. Desde una perspectiva didáctica, estos ejemplos permiten al estudiante visualizar que la trigonometría no solo describe triángulos, sino que resulta esencial para interpretar ciclos naturales que experimentamos todos los días.

Conclusiones

El recorrido realizado en este capítulo permite comprender que la trigonometría no es únicamente un conjunto de fórmulas o técnicas de cálculo: es un modo de pensar que articula relaciones entre ángulos, longitudes y variaciones periódicas presentes en el mundo natural y construido. Al estudiar las razones trigonométricas, las identidades fundamentales y los métodos para resolver triángulos rectángulos y oblicuángulos, el estudiante toma contacto con un lenguaje que permite describir con precisión tanto situaciones geométricas clásicas como fenómenos dinámicos más complejos. A lo largo del capítulo se mostró que detrás de cada razón trigonométrica hay una estructura conceptual que da sentido a las relaciones entre lados y ángulos, y que las identidades no deben asumirse como verdades aisladas, sino como conexiones profundas entre funciones que comparten una misma naturaleza periódica.

En paralelo, la resolución de triángulos permite reconocer que la trigonometría tiene una vocación eminentemente aplicada. Resolver triángulos no es un fin en sí mismo: es un camino para interpretar situaciones reales que abarcan desde mediciones indirectas en contextos cotidianos hasta problemas de navegación, diseño arquitectónico, sensores, instrumentación y modelación científica. Comprender cómo se combinan datos parciales para reconstruir una forma o determinar magnitudes inaccesibles fortalece el pensamiento lógico, el razonamiento espacial y la capacidad para abstraer patrones. Cuando el estudiante entiende que cada triángulo resuelto representa una situación concreta, la trigonometría deja de ser un repertorio de procedimientos y se convierte en una herramienta para leer el mundo.

Finalmente, la integración de aplicaciones físicas, biológicas, ambientales y tecnológicas permite apreciar que la trigonometría tiene un alcance mucho mayor que el tradicional. La presencia de fenómenos periódicos en la ingeniería eléctrica, los ritmos fisiológicos, las mareas, la acústica, el análisis de señales o la climatología muestra que las funciones trigonométricas son una forma privilegiada de representar y comprender la regularidad de muchos procesos naturales. De modo coherente con las perspectivas didácticas contemporáneas, este capítulo subraya la importancia de trabajar con representaciones múltiples, argumentos visuales, interpretaciones fenomenológicas y problemas contextualizados que devuelvan a la trigonometría su carácter dinámico y significativo. Cuando el aprendizaje se organiza de este modo, las razones e identidades dejan de ser símbolos abstractos y se transforman en herramientas para pensar, modelar y actuar en diferentes ámbitos de la vida académica y profesional.

Referencias

Ahrens, C. D. (2012). Meteorology today. Cengage Learning.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Arzarello, F., & Robutti, O. (2001). From body motion to algebraic description: A learning path in trigonometry. Educational Studies in Mathematics, 47(2), 217–236.

Berggren, J. L. (2007). Trigonometry. En V. Katz (Ed.), The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A sourcebook (pp. 573–625). Princeton University Press.

Crowley, S. J. (2015). Melatonin rhythms and sleep in humans. Journal of Biological Rhythms, 30(6), 521–534.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (pp. 37–52). Springer.

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Reidel.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM, 39(1–2), 127–135.

Griffiths, D. J. (2017). Introduction to electrodynamics (4th ed.). Cambridge University Press.

Herreros, C., & Martín, C. (2015). Electrocardiografía y análisis de señales biomédicas. Revista Española de Cardiología, 68(5), 421–431.

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: Towards an international GeoGebra institute. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27(3), 49–54.

Maor, E. (1998). Trigonometric delights. Princeton University Press.

Nakata, N., & Nishida, K. (2017). The use of ambient seismic noise for subsurface imaging. Geophysical Journal International, 208(3), 1428–1452.

Pierce, R. (2010). Multiple representations in mathematics teaching and learning. Mathematics Education Research Journal, 22(2), 39–56.

Rossing, T. D. (2002). The science of sound (3rd ed.). Addison-Wesley.

Simmons, G. F. (2016). Precalculus mathematics in a nutshell. MAA Press.

Stein, S., & Wysession, M. (2003). An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure. Blackwell Publishing.

Stewart, J. (2016). Calculus: Early transcendentals (8th ed.). Cengage Learning.

Tall, D. (2014). How humans learn to think mathematically. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202

Tchoshanov, M. (2011). Cognitive and instructional foundations of mathematical proficiency. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203841061

Thompson, P. W. (2016). Structure, coherence, and activity in mathematical thinking: Stepping into the shoes of others. Journal of Mathematical Behavior, 42, 65–75.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2008). Physics for scientists and engineers (6th ed.). W. H. Freeman.

Weber, K. (2006). Students' understanding of trigonometric functions. Mathematics Education Research Journal, 17(3), 91–112. https://doi.org/10.1007/BF03217427