PRIMERA EDICIÓN

Cálculo de una variable: un enfoque conceptual, visual y didáctico del cambio

AUTORÍA

REINOSO SÁNCHEZ MIGUEL ÁNGEL
SAQUINAULA BRITO JOSÉ LUIS

EDICIONES RISEI

COLECCIÓN:
Eduación en acción. Praxis, currículo y subjetividades

Cálculo de una variable: un enfoque conceptual, visual y didáctico del cambio

Autores

Reinoso Sánchez Miguel Ángel
Universidad Estatal de Milagro
mreinosos@unemi.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-3412-6894

Saquinaula Brito José Luis
Universidad Estatal de Milagro
jsaquinaulab@unemi.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-2080-2548

© Ediciones RISEI, 2025

Todos los derechos reservados.
Este libro se distribuye bajo la licencia Creative Commons Atribución CC BY 4.0 Internacional.

Las opiniones expresadas en esta obra son responsabilidad exclusiva de sus autores y no reflejan necesariamente la posición la editorial.

Editorial: *Ediciones RISEI*

Colección Educación en acción: Praxis, currículo y subjetividades
Título del libro: Cálculo de una variable: un enfoque conceptual, visual y didáctico del cambio
Autoría: Reinoso Sánchez Miguel Ángel / Saquinaula Brito José Luis
Edición: Primera edición
Año: 2025
ISBN digital: 978-9942-596-13-0
DOI: https://doi.org/10.63624/risei.book-978-9942-596-13-0

Coordinación editorial: Jorge Maza-Córdova y Tomás Fontaines-Ruiz
Corrección de estilo: Unidad de Redacción y Estilo
Diagramación y diseño: Unidad de Diseño
Revisión por pares: Sistema doble ciego de revisión externa

Machala – Ecuador, diciembre de 2025

Este libro fue diagramado en InDesign.
Disponible en: https://editorial.risei.org/
Contacto: info@risei.org

Prólogo

Escribir este libro fue un ejercicio de volver a mirar el cálculo con los ojos de quien lo descubre por primera vez. A lo largo de los años he visto cómo muchos estudiantes se enfrentan a sus conceptos con una mezcla de desconcierto y resignación, como si se tratara de un territorio reservado para unos pocos. Sin embargo, cada idea fundamental del cálculo a saber del límite, la variación, la continuidad, la derivada, nació de preguntas humanas muy profundas, de la necesidad casi intuitiva de entender cómo cambian las cosas. Esa historia, que suele olvidarse en las aulas, devuelve al cálculo una dimensión cercana y sorprendentemente accesible.

Durante la elaboración de estas páginas, me propuse recuperar esa esencia. No se trata solo de presentar definiciones precisas o procedimientos bien estructurados, sino de ofrecer una forma distinta de entrar en el tema: más pausada, más visual, más consciente de la importancia de la intuición. El cálculo no se aprende a golpes de fórmulas, sino cuando el estudiante logra ver en una gráfica, en un movimiento o en una idea sencilla, aquello que luego la matemática formal logra expresar con elegancia. Ese puente entre la vivencia y el rigor, entre la curiosidad y la estructura, es el corazón de este libro.

Mi deseo es que estas páginas acompañen tanto a quienes enseñan como a quienes aprenden. Que el docente encuentre aquí recursos para renovar su manera de explicar y que el estudiante descubra que el cálculo no es un obstáculo, sino un lenguaje para comprender el mundo con más profundidad. Si este libro logra, aunque sea en una pequeña medida, despertar ese interés genuino por pensar el cambio y la variación, entonces habrá cumplido su propósito.

Introducción

Cálculo de una variable: un enfoque conceptual, visual y didáctico del cambio es una obra que invita a redescubrir el cálculo desde su esencia más profunda: la búsqueda humana por comprender el movimiento, la transformación y la continuidad. Su autor plantea que el cálculo no debe ser visto únicamente como una colección de reglas o algoritmos, sino como una forma de pensamiento que permite leer el mundo en clave de cambio. A lo largo de sus capítulos, el libro recorre los fundamentos históricos y conceptuales de esta disciplina, desde las intuiciones de Arquímedes hasta la formalización de Newton y Leibniz, revelando cómo la humanidad logró traducir lo infinitamente pequeño en un lenguaje capaz de describir lo continuo. Esta mirada no pretende simplificar el rigor matemático, sino devolverle su sentido formativo, integrando el razonamiento lógico con la intuición, la visualización y la experiencia.

El autor propone un enfoque didáctico que une teoría y práctica, donde el aula se convierte en un espacio de exploración intelectual. El cálculo se enseña aquí como una experiencia cognitiva y estética, en la que los símbolos, las gráficas y las palabras se convierten en lenguajes complementarios del pensamiento. A través de herramientas como GeoGebra, Desmos y Python, el estudiante puede observar el cambio en acción, manipular funciones, analizar variaciones y descubrir patrones que antes permanecían ocultos. De esta manera, el aprendizaje deja de ser una actividad pasiva para transformarse en un proceso activo de construcción de significado. Cada capítulo ha sido diseñado para guiar al lector de forma gradual: desde la comprensión del límite como idea de aproximación, hasta la derivada como medida del cambio y la integral como reconstrucción del todo, cerrando con una reflexión sobre cómo enseñar el cálculo de manera significativa.

Escrito desde la experiencia docente y con una profunda sensibilidad pedagógica, este libro busca tender un puente entre el conocimiento matemático y la vida cotidiana. La obra invita a los profesores a enseñar desde la comprensión y a los estudiantes a pensar el cálculo como una forma de mirar el mundo con ojos nuevos. En sus páginas, la precisión del pensamiento se une con la emoción de descubrir, y la matemática se presenta no como una barrera, sino como un camino hacia la comprensión del cambio que sostiene la realidad. En definitiva, este texto propone una educación matemática más humana, reflexiva y creativa, en la que el cálculo no solo se aprende, sino que se vive como una experiencia de pensamiento, de belleza y de sentido.

Contenido

índice de tabla y figuras

Capítulo I

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo II

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo III

Índice de figuras

Capítulo IV

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo I

Fundamentos del cálculo y noción de límite

Introducción

El cálculo constituye una de las creaciones intelectuales más profundas de la humanidad. Su desarrollo no solo transformó la matemática, sino también la manera en que comprendemos los fenómenos naturales, el movimiento, el crecimiento y el cambio. Desde la perspectiva didáctica, enseñar cálculo implica mucho más que transmitir técnicas de derivación o integración: significa guiar al estudiante hacia una comprensión dinámica del mundo, donde las magnitudes se transforman de forma continua y el pensamiento se orienta hacia la modelización de lo real (Tall, 2009).

Históricamente, el cálculo emergió como respuesta a problemas concretos: medir áreas curvas, describir trayectorias, predecir velocidades. Sin embargo, su consolidación teórica requirió siglos de evolución conceptual, desde las ideas intuitivas de Arquímedes hasta la rigurosa formalización de Cauchy y Weierstrass. En este proceso, la noción de límite se erigió

ISBN 978-9942-596-13-0 | 2025
https://editorial.risei.org

como el corazón del cálculo: la frontera entre lo finito y lo infinito, entre la experiencia empírica y la abstracción matemática (Boyer & Merzbach, 2011; Edwards, 1979).

En la enseñanza contemporánea, el estudio del límite y la continuidad exige un enfoque que combine la intuición visual, la interpretación gráfica y la formalización simbólica. Comprender el límite no se reduce a memorizar definiciones, sino a construir esquemas mentales que relacionen la variación, la aproximación y la estabilidad. Por ello, este capítulo busca ofrecer una mirada integral de los fundamentos del cálculo, situando al estudiante ante las ideas que dieron origen a la ciencia del cambio.

El nacimiento del cálculo: de Arquímedes a Newton y Leibniz

El origen del cálculo puede rastrearse en los intentos de los antiguos por medir lo inconmensurable. Arquímedes, mediante su método de exhaución, anticipó la noción de límite al aproximar áreas y volúmenes a través de figuras poligonales cada vez más pequeñas (Boyer & Merzbach, 2011). En sus "Cuadraturas de la parábola" ya se percibe una intuición del infinito, aunque aún expresada con herramientas geométricas.

Durante el siglo XVII, la necesidad de describir el movimiento y las leyes de la naturaleza condujo a una transformación profunda del pensamiento matemático. Newton, en su Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, utilizó el cálculo al que llamó método de las fluxiones, explicar la gravitación universal y el movimiento planetario. Paralelamente, Leibniz desarrolló su propio enfoque, introduciendo la notación diferencial, que permitía expresar las relaciones de cambio de manera simbólica (Guicciardini, 2018).

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$$

Ambos compartieron una visión: el cálculo debía servir para traducir las leyes naturales al lenguaje de la razón. Sin embargo, la falta de una definición rigurosa de los infinitesimales generó críticas, especialmente de filósofos como Berkeley, quien consideraba al cálculo una "ficción metafísica" (Edwards, 1979). Solo en el siglo XIX, con los aportes de Cauchy y Weierstrass, la noción de límite dotó al cálculo de su fundamento lógico. Desde entonces, el cálculo se consolidó como el lenguaje universal del cambio, indispensable para la física, la ingeniería, la biología y la economía.

Función y cambio: la relación entre magnitudes variables

La función constituye el lenguaje del cambio. Desde su concepción moderna, desarrollada por Leonhard Euler en el siglo XVIII, una función expresa una correspondencia entre dos conjuntos, de modo que a cada valor de la variable independiente $\mathbf{x}$ le corresponde un único valor de la variable dependiente $\mathbf{y}$. Esta idea, que puede parecer simple, transformó para siempre la manera en que comprendemos los fenómenos naturales. A través de ella, las variaciones del mundo: la caída de un cuerpo, el crecimiento de una planta, la oscilación de un péndulo o el flujo de una corriente eléctrica; pudieron describirse y predecirse con precisión (Stewart, 2021).

Pero más allá de su definición formal, la función debe entenderse como una forma de pensar el cambio, como una manera de percibir la relación entre magnitudes variables. En palabras de Kaput (1994), aprender cálculo significa "aprender a ver el mundo en términos de relaciones cambiantes". Esta afirmación resume un giro epistemológico fundamental: el paso de un pensamiento centrado en resultados estáticos a uno orientado al proceso, a la variación continua, al movimiento.

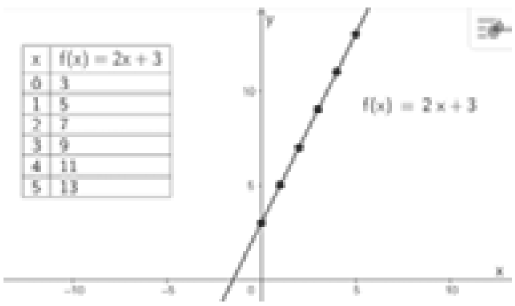
De la relación algebraica al significado fenomenológico

Cuando se enseña cálculo únicamente a través de expresiones algebraicas, el concepto de función se reduce a un conjunto de reglas manipulables. Sin embargo, cada función encierra una historia: un fenómeno, un proceso o una interacción entre magnitudes.

Ejemplo 1: La función lineal no es solo una ecuación, sino la representación de una relación constante (Figura 1): cada incremento de una unidad en $\mathbf{x}$ provoca un aumento de dos unidades en $\mathbf{y}$. Esta correspondencia puede modelar el costo de un servicio con tarifa fija o el nivel del agua en un tanque que se llena a ritmo constante. Comprender esa relación como una forma de variación es el punto de partida para construir un pensamiento verdaderamente funcional (Tall, 2009).

$$f(x) = 2x + 3$$

Figura 1.
Representación de una relación lineal



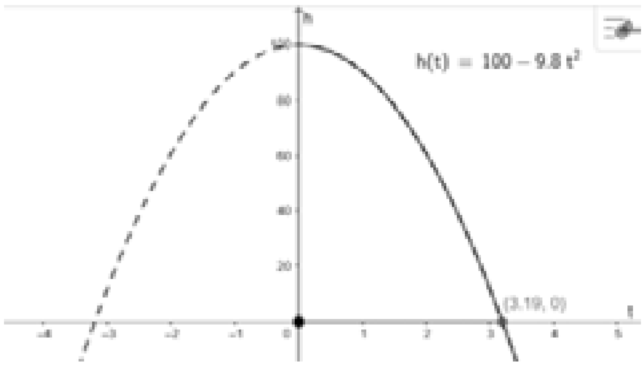
Nota. Elaboración propia.

Ejemplo2: en el movimiento de un cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad (Figura 2), si se desprecia la resistencia del aire, su altura en función del tiempo puede representarse como:

$$h(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2}$$

donde h_0 es la altura inicial y g la aceleración de la gravedad. Esta función cuadrática describe un cambio no uniforme, donde la velocidad aumenta con el tiempo. Al graficarla, el estudiante observa cómo la trayectoria parabólica traduce el movimiento real del cuerpo en un lenguaje matemático. Esa conexión entre lo físico y lo simbólico es el puente cognitivo que permite comprender el cálculo como una ciencia del cambio (Stewart, 2021).

Figura 2.
Caída de un cuerpo por acción de la gravedad



Nota. Elaboración propia.

La mirada visual del cambio: aprender con los ojos

Comprender el vínculo entre función y cambio exige pasar de lo simbólico a lo visual. Como afirma Tall (2009), la gráfica de una función no es solo una representación, sino una "ventana cognitiva" que permite ver cómo una cantidad responde a la variación de otra. La pendiente de una curva, por ejemplo, sintetiza el sentido del cambio: una pendiente positiva indica crecimiento; una negativa, decrecimiento; una horizontal, estabilidad.

Ejemplo 3: analizar el crecimiento de una planta. Si se miden su altura h en función del tiempo t, los datos suelen ajustarse a una función logística:

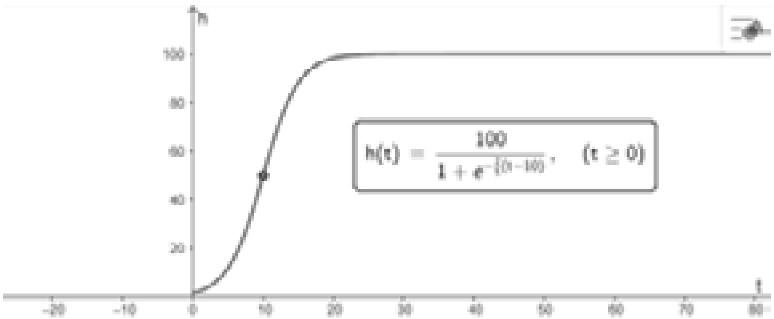
$$h(t) = \frac{L}{1 + e^{-k(t-t_0)}}$$

donde $\mathbf{L}$ representa la altura máxima, $\mathbf{k}$ la tasa de crecimiento y $\mathbf{t_0}$ el punto de inflexión. Al graficar esta función, el estudiante observa tres etapas: crecimiento lento inicial, desarrollo acelerado y estabilización. De esta manera, la función deja de ser un objeto abstracto para convertirse en un modelo de la vida, donde la matemática narra una historia biológica.

En el ejemplo (Figura 3) podemos observar que:

- Etapa inicial: la planta crece muy lentamente porque sus procesos biológicos aún se están adaptando.
- Etapa intermedia: cerca $\mathbf{t = t_0 = 10}$ de semanas, el crecimiento es más acelerado. Aquí la pendiente de la curva es máxima.
- Etapa final: conforme se acerca al límite $\mathbf{L = 100}$, el crecimiento disminuye hasta estabilizarse, ya que la planta alcanza su tamaño maduro.

Figura 3.
Caída de un cuerpo por acción de la gravedad



Tiempo t (semanas)	$\frac{100}{1+e^{-0.4(t-10)}}$	Etapa de crecimiento
0	1.8	Germinación: crecimiento lento inicial
5	11.92	Inicio del desarrollo
10	50	Punto de inflexión: crecimiento máximo
15	88.08	Etapa de madurez: estabilización
20	98.2	Saturación: crecimiento casi nulo

Nota. Elaboración propia.

Esta evolución refleja cómo en la naturaleza el crecimiento no es lineal, sino que responde a límites fisiológicos y ambientales.

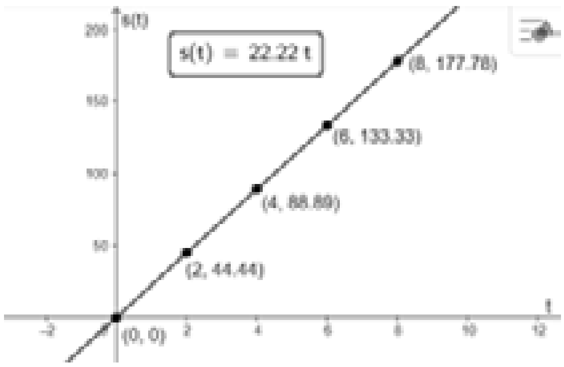
Como señala Blum y Ferri (2009), esta capacidad de traducir situaciones reales a modelos funcionales es una de las competencias más poderosas que ofrece la matemática, pues permite comprender, explicar y predecir fenómenos complejos.

La función como herramienta de modelización
Desde la perspectiva de la educación matemática, la función debe enseñarse no solo como un concepto, sino como una herramienta para modelar la realidad. De acuerdo con Hiebert y Carpenter (1992), la comprensión significativa de las matemáticas implica construir conexiones entre diferentes representaciones de un mismo fenómeno. Así, cuando un estudiante utiliza una función para describir la velocidad de un automóvil, está coordinando ideas algebraicas, gráficas, físicas y verbales. Por ejemplo, el movimiento rectilíneo uniforme se representa con la función:

$$\mathbf{s\,(t) = vt + s_0}$$

(Figura 4) donde y es la velocidad constante. Si $\mathbf{v} = 80\,\mathrm{km/h}$, la gráfica de $\mathrm{s\,(t)}$ muestra una línea recta que expresa una relación directa entre tiempo y distancia.

Figura 4.
Movimiento rectilíneo uniforme de un automóvil



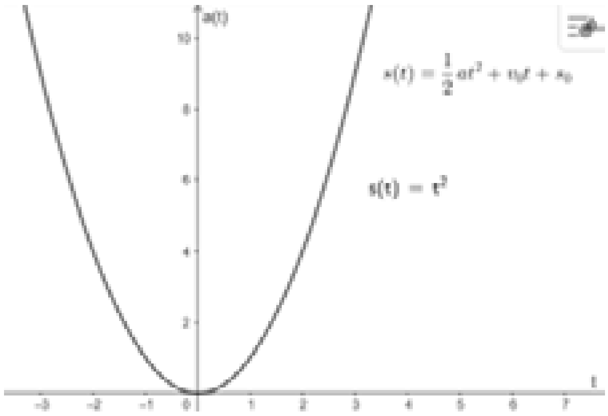
Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 4: Supongamos un automóvil que parte desde $\mathrm{s_0} = 0$ con velocidad constante $\mathrm{v} = 80\,\mathrm{km/h}$. En cada intervalo de tiempo igual, el móvil recorre distancias iguales.

En cambio, si el movimiento es acelerado, la función se vuelve cuadrática y la curva se inclina progresivamente, reflejando un cambio de ritmo. Supongamos un automóvil que parte del reposo $\mathrm{v_0} = 0$ y acelera con $\mathrm{a} = 2\mathrm{m/s^2}$. En este caso, la gráfica del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado muestra cómo la distancia recorrida por el automóvil no aumenta de manera constante, sino cada vez más rápido a medida que pasa el tiempo. Al inicio, el avance es lento, pero poco a poco la curva se eleva con mayor inclinación, lo que indica que el vehículo va ganando velocidad. La ecuación $\mathrm{s(t)} = \mathrm{t}^2$ (Figura

5) expresa esa aceleración: si el tiempo se duplica, la distancia se multiplica por cuatro. Esta relación permite entender que el movimiento no es uniforme, sino que está marcado por un cambio continuo de ritmo.

Figura 5.
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un automóvil



Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 5: Al observar la gráfica, el estudiante puede asociar el crecimiento de la curva con la sensación de un vehículo que parte desde el reposo y acelera, conectando así la idea matemática con una experiencia real y tangible del movimiento. En ambos casos, el estudiante aprende a pensar en términos de variación, más allá de la fórmula.

Esta concepción se concuerda con la idea de Kaput (1994) de que el pensamiento funcional constituye una forma de razonamiento dinámico que atraviesa toda la matemática. En su visión, la función es la herramienta que permite pasar del análisis de situaciones discretas al estudio de procesos continuos, desarrollando una comprensión profunda de la relación causa–efecto.

Una visión cognitiva del cambio

Desde el punto de vista cognitivo, comprender una función implica coordinar varias formas de pensamiento. Según Tall y Vinner (1981), los estudiantes construyen una “imagen conceptual” de la función antes de dominar su definición formal. Esa imagen se nutre de ejemplos, gráficos y metáforas que vinculan la matemática con la experiencia. Cuando un estudiante observa el nivel del agua subir en un recipiente y lo representa mediante una curva creciente, está activando un pensamiento funcional incluso sin utilizar fórmulas.

En este sentido, la enseñanza del cálculo debería centrarse en promover la coherencia entre imágenes, símbolos y significados. El objetivo no es que el estudiante memorice ecuaciones, sino que comprenda que toda función expresa una historia de cambio, una relación entre dos realidades en movimiento. Como plantea Duval (2006), el verdadero aprendizaje matemático surge cuando el sujeto logra traducir entre diferentes registros de representación (gráfico, numérico, verbal y algebraico) sin perder el sentido del concepto.

Función, tecnología y exploración didáctica

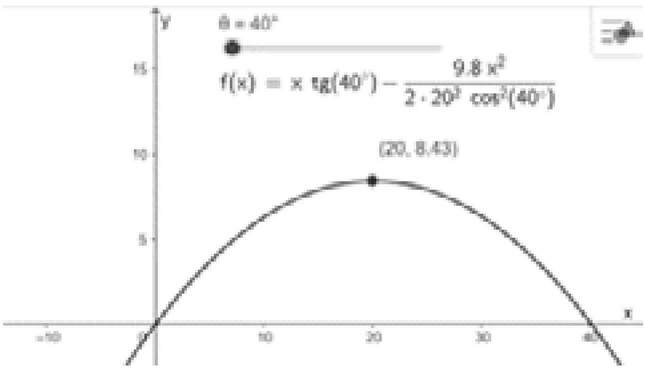
El uso de entornos dinámicos como GeoGebra permite que los estudiantes manipulen funciones y observen cómo la variación de los parámetros altera la gráfica. Por ejemplo, al modificar el coeficiente $\mathbf{a}$ en $\mathbf{y} = \mathbf{ax^2}$, se aprecia cómo la parábola se abre o se cierra, permitiendo visualizar la relación entre forma y parámetro. Esta exploración, defendida por Artigue (2009) como parte del enfoque instrumental, potencia la construcción del conocimiento al integrar la acción, la visualización y la reflexión.

Ejemplo 6: Un ejercicio ilustrativo consiste en representar el movimiento de un proyectil lanzado con velocidad inicial $\mathbf{v_0}$ y ángulo θ (Figura 6). Su trayectoria se describe mediante:

$$\mathrm{f(x) = x\tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2(\theta)}}$$

Manipulando $\mathbf{v_0}$ y θ, los estudiantes pueden observar cómo cambia el alcance máximo y la altura del proyectil, relacionando las propiedades de la función con leyes físicas. De este modo, el aprendizaje se transforma en una experiencia exploratoria que combina razonamiento abstracto y experimentación visual.

Figura 6.
Movimiento de un proyectil



Nota. Elaboración propia.

Pensar en movimiento: la función como forma de comprensión

La función enseña a pensar en movimiento. El cálculo no solo describe el cambio: enseña a percibirlo, a cuantificarlo y a representarlo. Desde esta perspectiva, el aprendizaje de las funciones constituye un punto de inflexión en la formación matemática, pues introduce una forma de pensamiento relacional, continuo y contextualizado. Como subraya Stewart (2021), el cálculo ayuda a "ver lo continuo en medio de lo discreto, y lo infinito en lo finito", una idea que conecta la razón matemática con la sensibilidad filosófica.

En la enseñanza universitaria, este enfoque puede traducirse en experiencias didácticas donde el estudiante construye modelos de cambio reales: crecimiento poblacional, consumo energético, vibraciones sonoras o circulación sanguínea. Cada modelo es una puerta hacia la comprensión profunda de la variación y hacia el reconocimiento del poder del pensamiento funcional para interpretar el mundo.

Concepto de límite: interpretación intuitiva, gráfica y algebraica

El concepto de límite es uno de los pilares del pensamiento matemático moderno. En torno a él se articula la posibilidad de describir procesos de cambio continuo, analizar lo infinitesimal y comprender la transición entre lo discreto y lo continuo. El límite es, por tanto, una idea fronteriza: permite acercarse al comportamiento de una función cuando los valores se aproximan a un punto crítico, incluso cuando el propio valor en ese punto no existe. Como sostiene Stewart (2021), "la noción de límite proporciona el fundamento sobre el cual descansan todas las ideas del cálculo".

El límite como intuición del acercamiento

La idea de límite no nació en el aula ni en los manuales de cálculo, sino en la mente de los primeros pensadores que se enfrentaron a problemas del movimiento y la variación. Zenón de Elea, ya en el siglo V a. C., planteó sus célebres paradojas sobre la imposibilidad del movimiento continuo, mostrando que una distancia puede dividirse indefinidamente en partes más pequeñas. Detrás de su aparente contradicción se encontraba la pregunta esencial: ¿qué ocurre cuando una cantidad cambia de forma incesante, pero dentro de márgenes cada vez más pequeños?

Siglos después, Isaac Newton y Gottfried Leibniz tradujeron esa intuición filosófica en un lenguaje simbólico, introduciendo la idea de la razón de cambio instantáneo. No hablaban aún de "límite", pero operaban con cantidades que tendían a cero, construyendo así la base conceptual del cálculo diferencial (Grabiner, 1981).

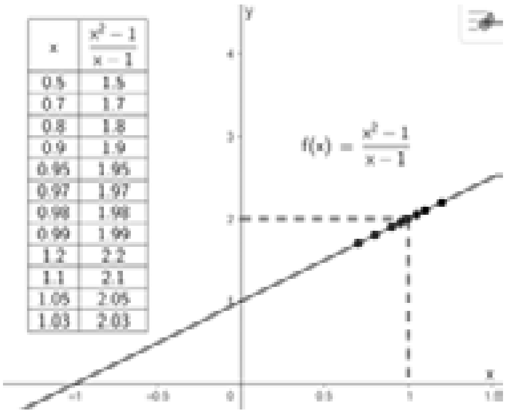
La noción moderna del límite, sin embargo, no se consolidó hasta el siglo XIX con Karl Weierstrass, quien reemplazó las ideas intuitivas de "infinitesimales" por una definición rigurosa basada en distancias: las famosas condiciones $\varepsilon - \delta$. Gracias a ellas, la matemática logró expresar la idea de "acercarse tanto como se desee" con precisión lógica (Tall, 1980). No obstante, la enseñanza del límite no debería comenzar con esta definición formal.

Ejemplo 7: si observamos la función, notamos que al sustituir $x = 1$ el denominador se anula (Figura 7). Pero si analizamos los valores próximos a 1 (0.9, 0.99, 1.01, 1.001), vemos que $f(x)$ se acerca cada vez más a 2.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

Aunque la función no está definida en $x = 1$, su comportamiento alrededor de ese punto sí revela una tendencia clara. Comprender esa tendencia constituye el primer paso para captar la idea de límite.

Figura 7.
Comportamiento en la cercanía de $x = 1$



x	$\frac{x^2-1}{x-1}$
0.5	1.5
0.7	1.7
0.8	1.8
0.9	1.9
0.95	1.95
0.97	1.97
0.98	1.98
0.99	1.99
1.2	2.2
1.1	2.1
1.05	2.05
1.03	2.03

Nota. Elaboración propia.

Como destaca Cornu (1991), muchos estudiantes enfrentan obstáculos al aprender este concepto porque su pensamiento permanece anclado en el valor exacto, no en el comportamiento cercano. Por ello, el proceso de enseñanza debe guiar al alumno desde la observación empírica de la aproximación hasta la formalización progresiva.

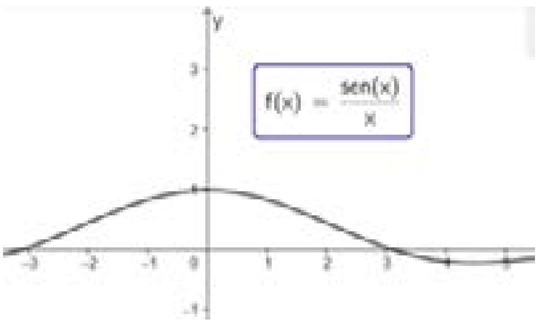
La visualización del límite: del trazo a la comprensión

El pensamiento visual desempeña un papel esencial en la comprensión del límite. La gráfica de una función permite ver el proceso de aproximación y reconocer el valor hacia el cual tienden los puntos de la curva. De hecho, la representación visual precede a la formalización algebraica y ofrece un apoyo cognitivo fundamental (Tall, 2009).

Ejemplo 8: Consideremos la función (Figura 8). Si se grafica cerca del punto $\mathbf{x} = 0$, la curva se aproxima a la altura 1 por ambos lados del eje, aunque el valor en $\mathbf{x} = 0$ no esté definido. Al observar esta continuidad visual, el estudiante intuye que el límite debe ser 1. Aquí, la gráfica no solo representa el fenómeno: lo hace inteligible.

$$\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{sen(x)}}{\mathrm{x}}$$

Figura 8.
Comportamiento en la cercanía de $x = 0$



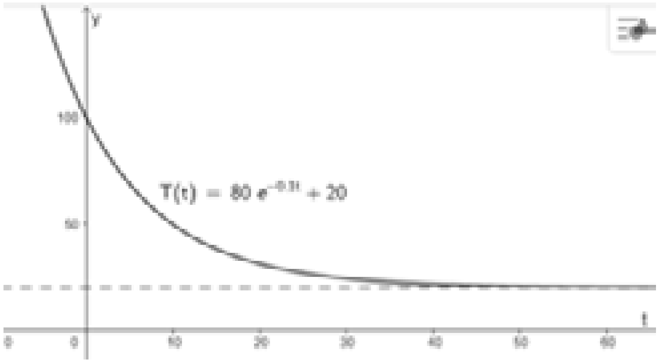
Nota. Elaboración propia.

Las herramientas tecnológicas como GeoGebra, Desmos o Grapher potencian esta comprensión al permitir manipular dinámicamente los valores y observar cómo la función responde. La interactividad transforma la idea de límite en una experiencia perceptiva. Según Artigue (2009), esta exploración digital favorece el desarrollo del pensamiento funcional, pues el estudiante deja de ver la función como un objeto estático para concebirla como un proceso vivo de cambio.

Ejemplo 9: modelar el enfriamiento de un líquido. Si la temperatura $\mathrm{T(t)}$ de una taza de café sigue la función donde $\mathbf{T}$ representa el tiempo en minutos, la gráfica muestra cómo la temperatura desciende progresivamente hasta estabilizarse en 20 °C (Figura 9). El límite de $\mathrm{T(t)}$ cuando $\mathbf{T}$ tiende al infinito es 20, lo que corresponde a la temperatura ambiente. Aquí, el límite no solo tiene un significado matemático: describe un fenómeno físico de equilibrio térmico.

De esta manera, el límite se convierte en un puente entre lo abstracto y lo real. Como señala Kaput (1994), “la enseñanza del cálculo debe partir de experiencias de variación y cambio observables, para que las fórmulas adquieran sentido y no se perciban como artificios simbólicos”.

Figura 9.
Comportamiento cuando t tiende al infinito



Nota. Elaboración propia.

El límite formal: rigor y lenguaje

La formalización algebraica del límite surge cuando necesitamos expresar con precisión lo que la intuición y la observación ya habían anticipado. La definición de Weierstrass traduce el acercamiento en términos de proximidad entre números.

Un número real L es el límite de una función L cuando x tiende o se aproxima a x_0 si y solo si para cualquier número real positivo ε, por pequeño que sea, existe un número real δ, tal que para todo $x \neq x_0$ si la distancia entre x y x_0, es menor que δ, entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ε.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esta formulación, aunque abstracta, tiene una belleza conceptual: elimina cualquier referencia al movimiento y conserva solo la relación entre dos distancias, ε y δ. Stewart (2021) la presenta como la culminación del razonamiento sobre la continuidad, mientras que Tall y Vinner (1981) la interpretan como una definición formal que debe construirse sobre una imagen conceptual previa.

Ejemplo 10: Demostrar aplicando la definición de límite que

$$\lim_{x \to 2} 3x + 1 = 7$$

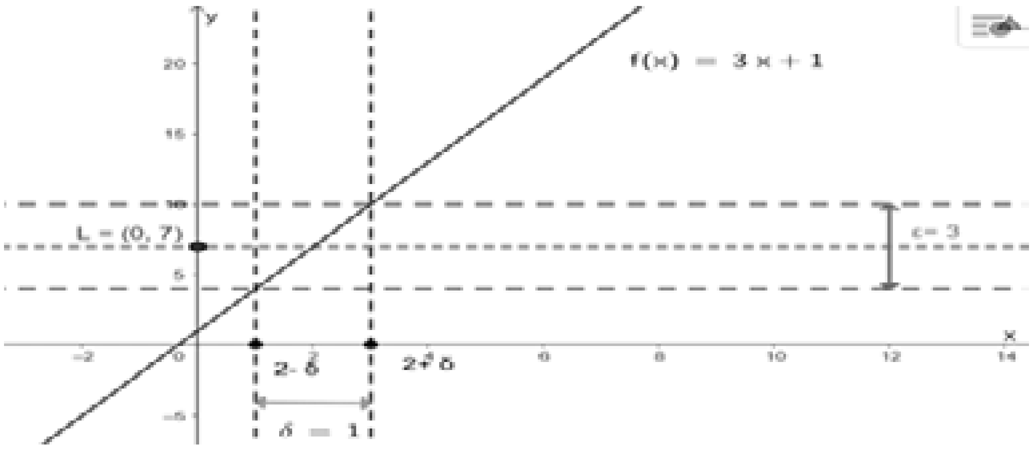
Solución.

Aplicando la definición habrá que buscar $\delta(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$ tal que $0 < |x - 2| < \delta$ Entonces $|3x + 1 - 7| < \varepsilon$ trabajando con esta última desigualdad, tenemos:

$$|3x + 1 - 7| < \varepsilon. \Rightarrow |3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon$$

de donde $|\mathbf{x}-2|<\frac{\varepsilon}{3}$. Luego si hacemos $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ estaríamos garantizando que para todo radio $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ las imágenes de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ estarían dentro la franja de error ε, por lo que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 2} 3\mathbf{x}+1=7$.

Figura 10.
Comportamiento de $f(x)=3x+1$ en $x=2$.



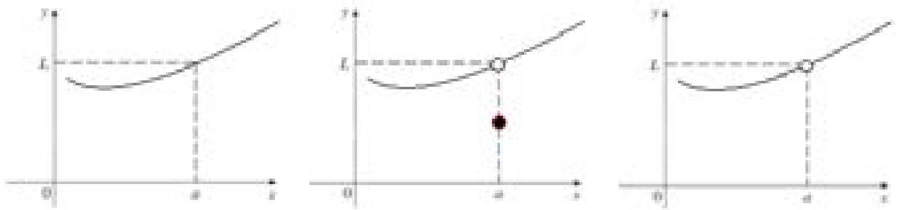
Nota. Elaboración propia.

Es importante denotar que no es necesario que $\mathbf{f}$ esté definida en el punto para que tenga límite en él (Figura 10). Esto significa que al encontrar el límite de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ se aproxima a "$\mathbf{a}$", no se considera $\mathbf{x}=\mathbf{a}$. De hecho, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ no necesita estar definida cuando $\mathbf{x}=\mathbf{a}$. Lo único que importa es cómo se define $\mathbf{f}$ cerca de $\mathbf{a}$.

En la mayoría de las situaciones prácticas, encontrar el δ (positivo) en función del ε el cual ha sido arbitrariamente seleccionado, es muy difícil en general, por tanto, en nuestro curso, no haremos énfasis en este procedimiento, es opcional por parte de los estudiantes, el estudio de este aspecto en algún libro que el profesor le indique oportunamente. Por lo que la definición de límite no es una herramienta cómoda para el cálculo de límites como veremos a continuación. Algo verdaderamente importante en este contexto es, el hecho de que el límite de existir es siempre único, y se resalta por el teorema que sigue a continuación.

Observe en las figuras siguientes que en el inciso c), $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ no está definida y, en el inciso b), $\mathbf{f}(\mathbf{a})\neq\mathbf{L}$. Sin embargo, en cada caso, independientemente de lo que sucede en $\mathbf{a}$, es cierto que. (Figura 11)

Figura 11.
Comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a a



a) b) c)

Nota. Elaboración propia.

Propiedades fundamentales de los límites

El concepto de límite, además de su profundidad teórica, posee una estructura lógica que le confiere coherencia dentro del sistema matemático. Una vez comprendida su definición intuitiva y formal, surge la necesidad de estudiar sus propiedades fundamentales, aquellas que permiten operar con funciones sin perder la consistencia del razonamiento. El límite no es un artificio aislado, sino una extensión natural de las propiedades aritméticas al mundo del cambio y la aproximación.

Como señala Stewart (2021), el cálculo adquiere poder operativo cuando las reglas que rigen los números reales se trasladan al análisis de las funciones. Estas propiedades son las que hacen posible calcular límites con rigor y simplicidad, evitando recurrir siempre a la definición $\varepsilon - \delta$, aunque esta sea su fundamento lógico.

Teorema: *Si una función f tiene límite en un punto x_0, entonces este límite es único.*

Este principio, aparentemente obvio, posee un profundo significado epistemológico: afirma que el proceso de aproximación de una función hacia un punto no puede conducir a dos resultados distintos. Si los valores de $f(x)$ se acercan simultáneamente a dos números diferentes L_1 y L_2, no puede hablarse de límite. En otras palabras, la tendencia que define al límite debe ser inequívoca.

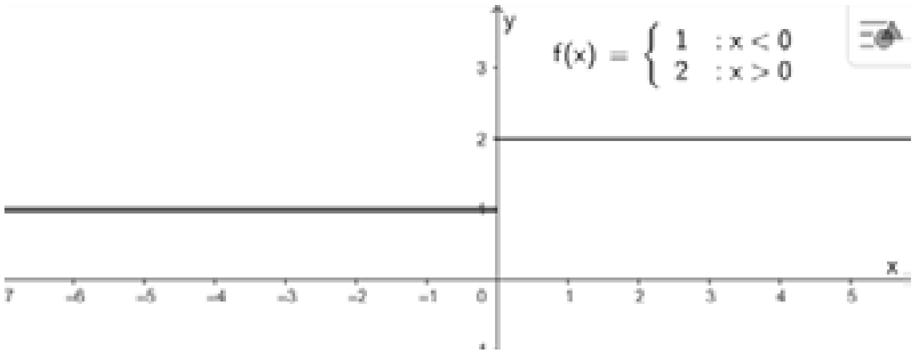
Desde una perspectiva visual, este teorema se aprecia cuando la gráfica de una función se aproxima a un solo valor en el eje y al acercarse al punto x_0. Si desde la derecha y desde la izquierda la función converge al mismo valor, entonces ese es el límite. En cambio, si la función tiende a valores distintos según la dirección de aproximación, el límite no existe.

Ejemplo 11: la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0 \\ 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

no posee límite en $\mathrm{x} = 0$, pues los valores laterales difieren. La gráfica muestra un salto que simboliza precisamente la ruptura de la unicidad (Figura 12).

Figura 12.
Comportamiento alrededor de $x = 0$



Nota. Elaboración propia.

Este teorema es esencial porque establece la determinación del comportamiento funcional, evitando ambigüedades que harían imposible definir continuidad o derivación. Desde una lectura pedagógica, este principio también refuerza la idea de que el límite es un comportamiento global, no una simple sustitución numérica.

Propiedades algebraicas del límite y Límites laterales
Comprendida la unicidad, el siguiente paso es reconocer cómo los límites se comportan frente a las operaciones básicas. Si dos funciones poseen límites definidos en un mismo punto, entonces su suma, su producto o su cociente (cuando el denominador no se anula) también los tienen. Estas propiedades son las que otorgan al cálculo su capacidad de generalización.

"Sean f y g dos funciones tales que existen los límites:

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{L}_1 \text{ y } \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{L}_2 \text{ entonces:}$$

1. $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} (\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x})) = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$
2. $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{L}_1\mathrm{L}_2$
3. $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{g}(\mathrm{x})} = \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_2} \text{ si } \mathrm{L}_2 \neq 0$
4. $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} (\alpha\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \beta\mathrm{g}(\mathrm{x})) = \alpha\mathrm{L}_1 + \beta\mathrm{L}_2$ (Linealidad)

5. $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = L_1^n$
6. $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$

Otras propiedades sobre los límites son las siguientes:

- Si una función f es positiva para todo x de una vecindad reducida de un punto x_0 y el existe el límite de f en dicho punto entonces el límite L es también positivo.
- Si dos funciones f y g satisfacen cierta relación de desigualdad para todo x de una vecindad reducida de un punto x_0, $f(x) \leq g(x)$ entonces si los límites de ambas existen se cumple que $L_1 \leq L_2$.
- Sean f, g, h tres funciones tales que cumplen: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x de cierta vecindad reducida de un punto x_0. Entonces si existen los límites de f y g en dicho punto y supongamos es igual a L, entonces el límite de h también es L en dicho punto. (En algunos textos esta propiedad se le denomina "emparedado", "sándwich" o propiedad de "intercalación"

Estas reglas pueden demostrarse rigurosamente a partir de la definición formal, pero también se entienden intuitivamente si se considera que el límite preserva la estructura aritmética de las operaciones. Es decir, el comportamiento de las funciones al aproximarse a un punto imita el comportamiento de los números a los que tienden. Larson y Edwards (2022) señalan que este conjunto de propiedades transforma el límite en una herramienta manipulativa: una "aritmética del cambio" que hace posible operar con expresiones complejas sin necesidad de reconstruir el razonamiento desde cero.

En ocasiones ocurre que, para analizar la existencia del límite en un punto, tenemos necesidad de analizar el comportamiento tanto por la derecha como por la izquierda de dicha función en la vecindad reducida de dicho punto para poder arribar a la conclusión de si existe o no el límite en dicho punto, este análisis lo haremos bajo el acápite de Límites laterales.

Por tanto, el concepto de límites laterales es de vital importancia para el análisis de la existencia del límite de la función en un punto. Los límites laterales derecho e izquierdo del punto se denotan por y

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$$

Teorema:
"El límite de una función f en un punto x0 existe, sí y sólo sí, existen y son iguales los límites laterales respecto a dicho punto".
El límite general existe únicamente si ambos límites laterales existen y son iguales:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Ejemplo 12: Sea la función

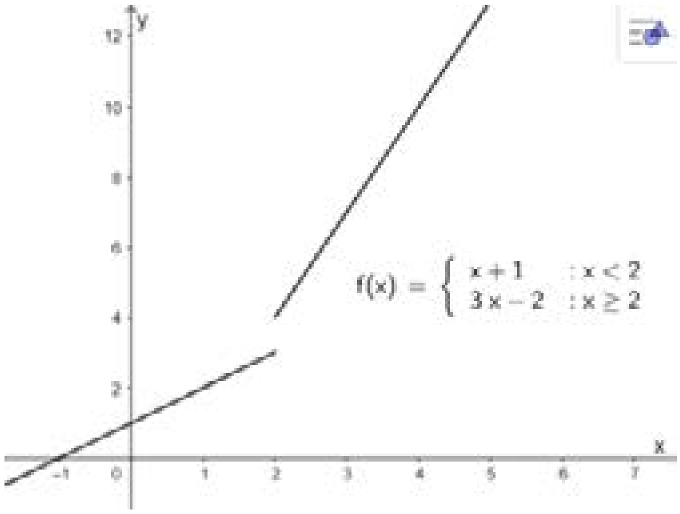
$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

Al evaluar los límites laterales en $x = 2$ (Figura 13),

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \text{ y } \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

Los valores son distintos, por lo que el límite no existe.

Figura 13.
Comportamiento alrededor de $x = 2$



Nota. Elaboración propia.

Límites de funciones algebraicas
El estudio de los límites de funciones algebraicas constituye un punto de partida fundamental para comprender el comportamiento de las expresiones matemáticas más comunes en el análisis. Estas funciones aparecen con frecuencia en problemas de física, economía, ingeniería o biología, y su análisis permite describir fenómenos de crecimiento, equilibrio o tendencia.

Desde el punto de vista formal, las funciones algebraicas se caracterizan por estar formadas por operaciones finitas de suma, resta, multiplicación, división y potencias de la variable independiente. A diferencia de las funciones trascendentes (como las trigonométricas o exponenciales), las algebraicas poseen un comportamiento más predecible $\mathbf{y}$, en muchos casos, su límite puede determinarse mediante una simple evaluación directa.

Sin embargo, más allá de su aparente sencillez, el cálculo de sus límites permite al estudiante afianzar los principios de continuidad, simplificación y aproximación que sustentan todo el razonamiento del cálculo diferencial.

Como señalan Larson y Edwards (2022), las funciones algebraicas son el "laboratorio natural del límite": en ellas se aprende a reconocer cuándo una función se comporta de manera continua y cuándo las operaciones algebraicas requieren ser ajustadas mediante factorización o racionalización.

a. **Funciones polinomiales:** Para calcular el límite en un punto x_0 de una función polinómica de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0 \text{ y } a_i$$

reales o complejos, basta evaluar la función en dicho punto, es decir,

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

b. **Funciones racionales:** Para calcular el límite en un punto x0 de una función racional

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+\ldots+a_nX^n}{b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3+\ldots+b_mX^m}$$

donde:

$$n, m \in \mathbb{N}, \; a_n \neq 0 \text{ y } b_m \neq 0$$

basta evaluar cada polinomio de dicha función, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

c. **Funciones trigonométricas**, exponenciales logarítmicas e hiperbólicas: En todos los casos para calcular el límite en un punto x_0 de una cualquiera de estas funciones, basta evaluar la función correspondiente en el punto x_0.

d. **Funciones en la forma,** $f(x)g(x)$. Para calcular el límite de una función de este tipo basta expresarla en la forma exponencial, a saber:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

y calcular el límite del exponente:

$$g(x)\ln(f(x)),$$

teniendo en cuenta que el resultado final es igual a: "e" elevado a dicho valor obtenido.

Comprender el sentido del infinito en el cálculo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

El estudio de los límites infinitos marca un punto de inflexión en la formación conceptual del estudiante de cálculo, pues introduce una de las ideas más abstractas y poderosas de las matemáticas: el comportamiento de una función cuando crece o decrece sin límite. No se trata de "alcanzar" el infinito, sino de describir una tendencia, un modo de comportamiento de la función cuando la variable independiente se aproxima a un determinado valor (Stewart, 2021).

En palabras simples, un límite infinito permite expresar que los valores de una función pueden aumentar o disminuir indefinidamente a medida que nos acercamos a cierto punto, aunque la función no esté definida en ese punto. Es una manera formal de decir que la función "se dispara" hacia arriba o hacia abajo, lo cual tiene una interpretación visual muy concreta: la existencia de una asíntota vertical.

Ejemplo 13: consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{x-3},$$

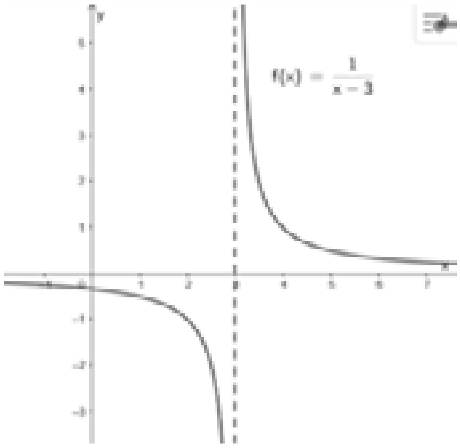
Si observamos su comportamiento alrededor de $x = 3$, notamos que los valores de $f(x)$ aumentan sin límite cuando x se aproxima a 3 por la derecha, y disminuyen sin límite cuando se aproxima por la izquierda (Figura 14). De este modo:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty.$$

En consecuencia, la recta $x = 3$ es una asíntota vertical de la función.

Este fenómeno aparece con frecuencia en modelos de la naturaleza, como en la ley de Coulomb, donde la intensidad del campo eléctrico crece indefinidamente al acercarse a una carga puntual (Thomas et al., 2024).

Figura 14.
Comportamiento alrededor de $x = 3$



Nota. Elaboración propia.

Sea $\mathbf{f}$ una función definida por ambos lados de $\mathbf{a}$, excepto posiblemente en la misma $\mathbf{a}$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a "a".

Sea $\mathbf{f}$ una función definida por ambos lados de $\mathbf{a}$, excepto posiblemente en la misma $\mathbf{a}$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a "a".(Tabla 1)

La recta $x = a$ se llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si al menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

Tabla 1.
Límites infinitos y límites laterales de una función

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$	$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Nota. Elaboración propia.

Los límites infinitos también pueden definirse de manera precisa:

Definición: Sea $\mathbf{f}$ una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene al número "$\mathbf{a}$", excepto posiblemente en "$\mathbf{a}$" misma. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo $\mathbf{M}$ existe un número δ positivo tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > M$.

Esta formulación, presentada con precisión en los textos clásicos de análisis de Apostol (1967) revela que los límites infinitos no representan valores alcanzados, sino comportamientos asintóticos, un tipo de acercamiento sin llegada, característico del pensamiento infinitesimal.

Apoyo didáctico: En la enseñanza del cálculo, los límites infinitos cobran sentido cuando se visualizan. El uso de herramientas como GeoGebra o Desmos permite representar el crecimiento o decrecimiento abrupto de las funciones

Ejemplo 14: si graficamos

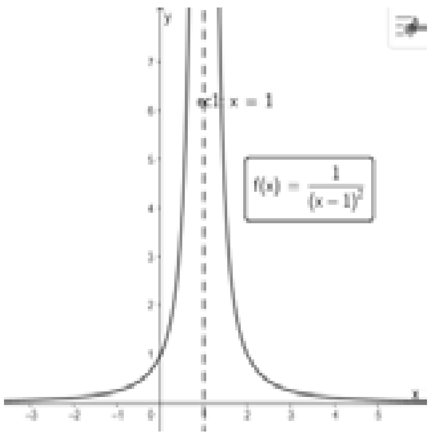
$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2},$$

observamos que la curva se eleva hacia el infinito tanto por la izquierda como por la derecha de $x = 1$, mostrando una simetría vertical. Esto se expresa como:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, la recta x=1 es una asíntota vertical (Figura 15).

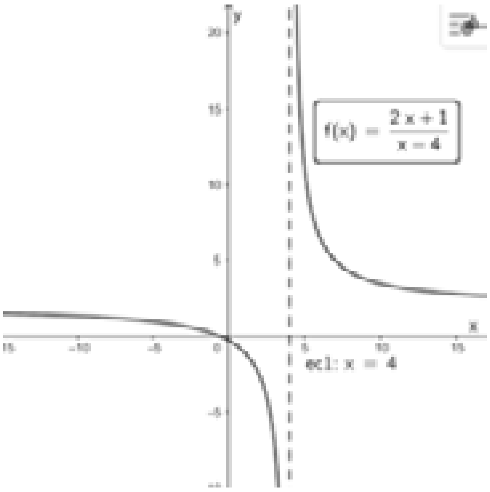
Figura 15.
Comportamiento alrededor de $x = 1$



Nota. Elaboración propia.

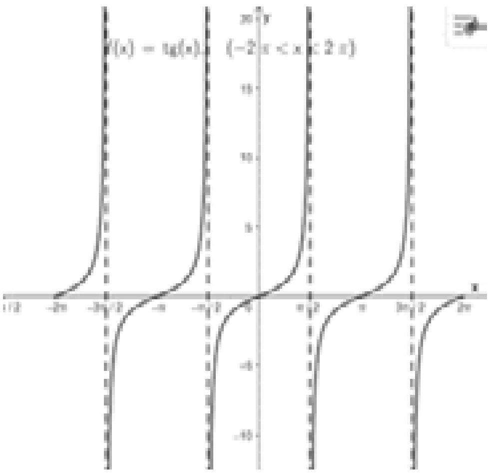
Comportamientos similares muestran otras funciones como se muestra a continuación:

Figura 16.
Comportamiento alrededor de $x = 4$



Nota. Elaboración propia

Figura 17.
Indeterminaciones para $f(x) = tan(x)$



Nota. Elaboración propia

Desde una perspectiva analítica, los límites infinitos permiten describir fenómenos de crecimiento o decrecimiento no acotado y establecer condiciones de existencia de derivadas e integrales impropias. Por ejemplo, en el cálculo integral, cuando el área bajo una curva se extiende hacia una asíntota vertical, se recurre a los límites infinitos para definir correctamente el valor del área (Thomas et al., 2024).

Asimismo, la mediación visual y simbólica ayuda a superar las concepciones ingenuas de infinito como "el número más grande", permitiendo comprenderlo como una idea límite, un proceso que nunca se completa. Este cambio cognitivo, conocido como "reconceptualización del infinito", es un hito en la transición al pensamiento matemático avanzado (Hiebert & Grouws, 2007).

Límites infinitos en el infinito

Cuando en cálculo hablamos de límites infinitos en el infinito, nos referimos al comportamiento de una función cuando la variable independiente x crece o decrece indefinidamente. En otras palabras, queremos entender qué ocurre con $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. En este contexto, el término "infinito" ya no representa un punto inaccesible en el eje de las ordenadas, sino una dirección de avance ilimitado sobre el eje de las abscisas (Stewart, 2021).

Así, cuando decimos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ aumentan indefinidamente a medida que x crece sin límite. De forma similar,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

expresa que la función decrece indefinidamente cuando x toma valores negativos muy grandes.

En ambos casos, se analiza la tendencia de la función en los extremos del dominio, lo cual resulta fundamental para comprender fenómenos de crecimiento y decrecimiento ilimitado, así como el comportamiento global de modelos polinomiales, exponenciales, racionales y logarítmicos (Thomas et al., 2024).

También pueden considerarse los planteamientos siguientes:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ \text{ y } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Es fácil estudiar el comportamiento en el infinito de la función polinomial de grado nS:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0 \text{ y } a_i$$

reales o complejos

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} x^n \left(\tfrac{a_0}{x^n} + \tfrac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n \right) = \begin{bmatrix} +\infty \text{ si } a_n > 0 \\ -\infty \text{ si } a_n < 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, que el comportamiento en $+\infty$ dependerá del signo del coeficiente principal.

Por otra parte el límite en el infinito de funciones racionales de la forma:

$$f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+\ldots+a_nX^n}{b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3+\ldots+b_mX^m}$$

donde

$$n, m \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0 \text{ y } b_m \neq 0$$

depende de los grados de los polinomios en el numerador (n) y el denominador (m).

Tabla 2.
Límites en el infinito según grado de los polinomios

Casos	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	**Justificación**
Grado del numerador es menor que el grado del denominador $n < m$	0	El denominador crece más rápido que el numerador.
Grado del numerador es igual grado del denominador $n = m$	$\frac{a_n}{b_m}$	Los términos de mayor grado dominan; el resto se hace despreciable.
Grado del numerador es mayor que grado del denominador $n > m$	∞ o $-\infty$ (dependiendo del signo de los coeficientes)	El numerador crece más rápido que el denominador; no hay límite finito.

Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 15:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3+5} = 0.$$

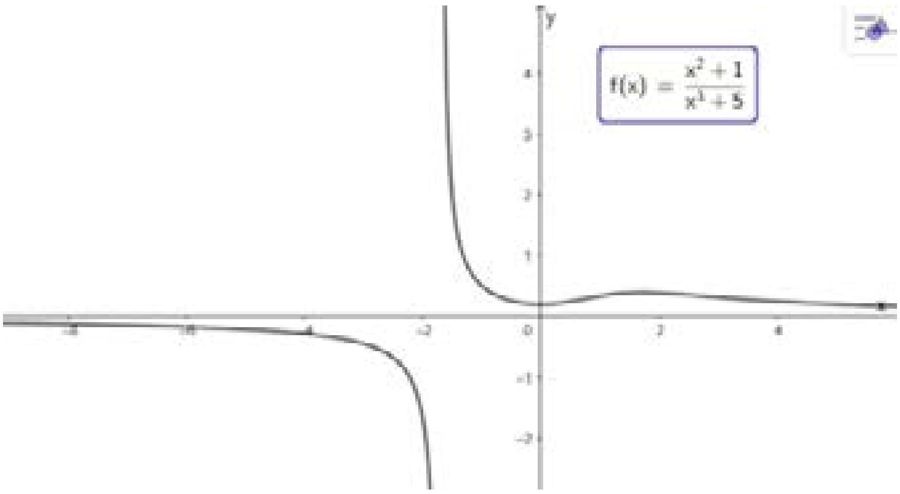
Grado del numerador es menor que el grado del denominador $n < m$ (Figura 18)

Formas indeterminadas

En el estudio de los límites, la noción de forma indeterminada ocupa un lugar esencial porque representa una situación en la que los procedimientos algebraicos convencionales no permiten obtener directamente un resultado. Una forma indeterminada surge cuando, al sustituir un valor en una función, se obtiene una expresión ambigua que no define un límite único, como por ejemplo:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^{0},\quad \infty-\infty^{\cdot}$$

Figura 18.
Límites en el infinito con grado del numerador menor que el denominador



Nota. Elaboración propia

Estas expresiones son “indeterminadas” porque el resultado final depende del comportamiento específico de las funciones involucradas al aproximarse al punto de interés. Así, la misma forma simbólica puede conducir a distintos valores numéricos del límite, según el contexto (Stewart, 2021).

El término “indeterminada” no significa que el límite no exista necesariamente, sino que no puede determinarse mediante una simple sustitución. En estos casos, es necesario aplicar transformaciones algebraicas, razonamiento analítico o reglas específicas, como la Regla de L’Hôpital, para resolver la ambigüedad. Desde una perspectiva analítica, las formas indeterminadas surgen de la interacción entre funciones que, al aproximarse a un mismo punto o al infinito, tienden simultáneamente a valores extremos o nulos. Esto genera una tensión conceptual: ¿qué domina, el crecimiento o la disminución? (Thomas et al., 2024).

Las formas indeterminadas más comunes pueden agruparse según su estructura:

1. **Cocientes indeterminados:**

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty}$$

Son las más frecuentes y se resuelven aplicando factorizaciones, racionalizaciones o la Regla de L’Hôpital.

2. **Productos indeterminados:** $0 \cdot \infty$. Requieren transformar el producto en un cociente para poder aplicar técnicas de límites.
3. **Diferencias indeterminadas:** $\infty - \infty$. Suelen aparecer en funciones racionales o radicales y demandan la búsqueda de una forma común de comparación entre las tasas de crecimiento.
4. **Potencias indeterminadas:** $1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}$. Representan una competencia entre la base y el exponente: una cantidad que tiende a 1 pero elevada a una potencia muy grande, o una base que tiende a 0 pero con exponente variable.

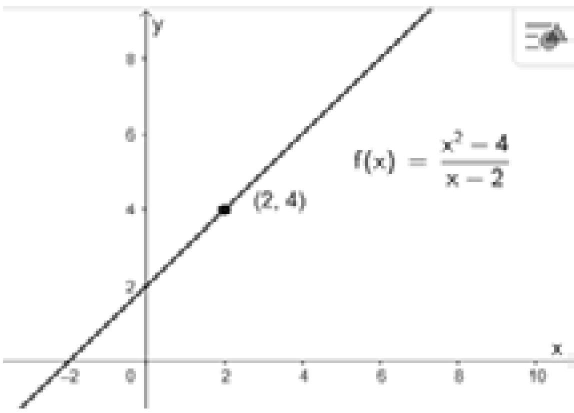
Estas categorías no son arbitrarias, sino que reflejan las diferentes maneras en que se puede producir una indeterminación entre magnitudes infinitesimales o infinitas (Apostol, 1967).

Ejemplo 16: Calcular

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Responde a una forma del tipo $\frac{0}{0}$, que luego de factorizar y simplificar eliminamos la indeterminación. (Figura 19)

Figura 19.
Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$



Nota. Elaboración propia

Ejemplo 17: Calcular

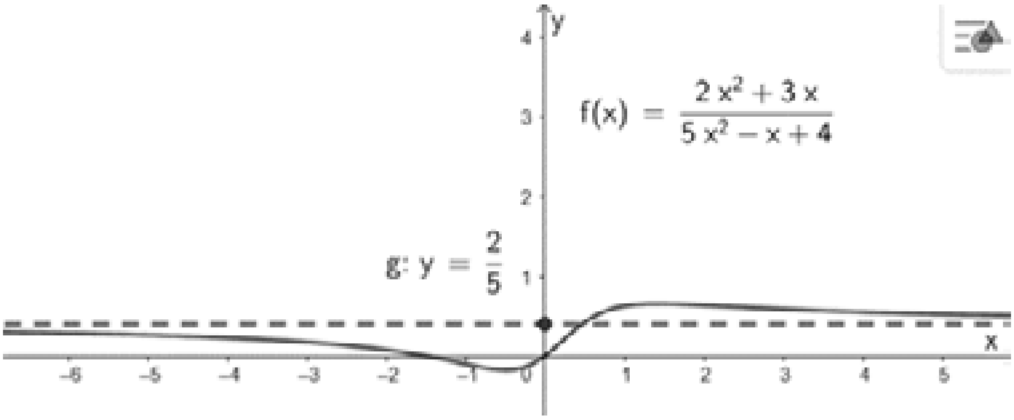
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x}{5x^2-x+4} = \frac{2}{5}.$$

El crecimiento de numerador y denominador es comparable (Figura 20). Dividiendo ambos entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{5-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{2}{5}$$

El resultado final depende del cociente de los coeficientes principales.

Figura 20.
Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$



Nota. Elaboración propia

Desde el punto de vista analítico, las formas indeterminadas muestran que el cálculo diferencial e integral no se limita a sustituir valores, sino a comprender comportamientos de tendencia. Son un espacio donde la matemática deja de ser estática y se convierte en una disciplina del cambio, del acercamiento progresivo y del análisis de la magnitud relativa de dos procesos (Tall, 2019).

Apoyo didáctico: las formas indeterminadas ofrecen una oportunidad privilegiada para vincular lo algebraico con lo conceptual. En el aula, el estudiante puede experimentar la frustración inicial de no obtener un resultado definido, pero con la guía adecuada puede transformar esa incertidumbre en un proceso de indagación y descubrimiento. De este modo, el docente fomenta el pensamiento analítico y la autonomía en la resolución de problemas (Hiebert & Grouws, 2007).

Límites fundamentales

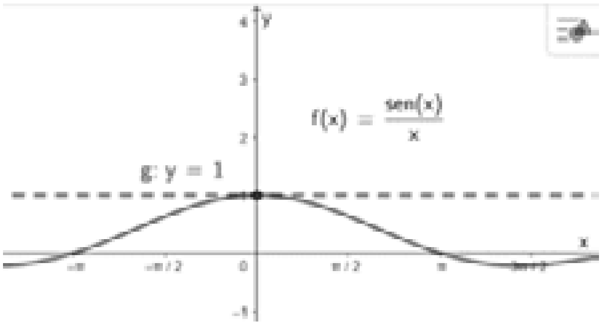
Los límites fundamentales son la piedra angular del cálculo, porque representan los comportamientos más simples, pero a la vez más reveladores, de las funciones en torno a un punto. Comprenderlos implica reconocer que el cálculo no es una colección de reglas para manipular expresiones, sino un lenguaje del cambio.

A través de los límites fundamentales, aprendemos a describir procesos que se aproximan, se transforman y tienden a una estabilidad dinámica. Son los primeros escenarios donde el estudiante observa cómo lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande se relacionan con lo finito, dando sentido matemático al cambio continuo (Stewart, 2021).

En la historia del pensamiento matemático, estos límites fueron el punto de encuentro entre la intuición geométrica de los griegos y el rigor analítico de Newton y Leibniz. Lo que en la antigüedad se concebía como una aproximación o "razonamiento por exceso y defecto", hoy se formula con precisión como un límite: una tendencia que nunca se completa, pero que se puede describir con exactitud (Apostol, 1967).

El dominio de los límites fundamentales permite al estudiante anticipar resultados sin recurrir a métodos complicados. Son expresiones que condensan leyes de comportamiento universal de las funciones y que aparecen reiteradamente en derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales y modelaciones científicas.

Figura 21.
Límite fundamental trigonométrico



Nota. Elaboración propia

a. El límite del seno sobre su argumento

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Este límite expresa una verdad geométrica: cuando el ángulo es muy pequeño, el arco y la cuerda de un círculo son prácticamente iguales. (Figura 21).
En términos visuales, el seno de un ángulo medido en radianes se comporta como la función identidad cerca del origen.

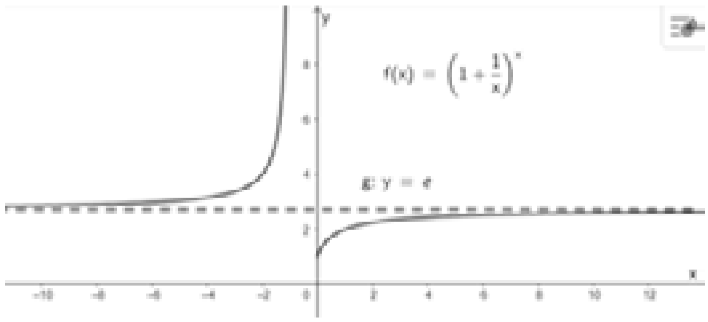
b) **El límite exponencial** que define el número

$$e. \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Este límite describe un proceso de crecimiento continuo.

A medida que el número de incrementos por unidad de tiempo aumenta sin límite, la cantidad resultante tiende a estabilizarse en el número e. (Figura 22)

Figura 22.
Límite exponencial



Nota. Elaboración propia

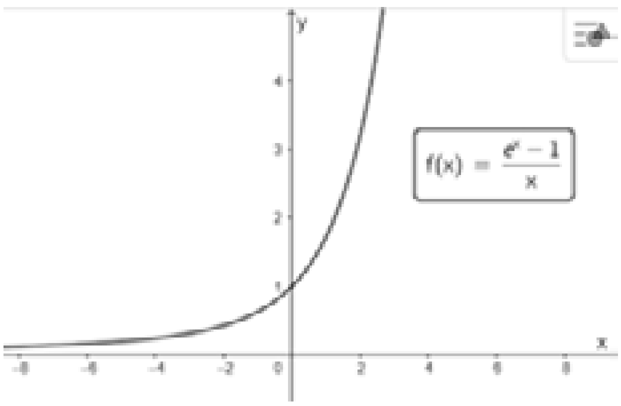
Este resultado, que emerge del análisis del interés compuesto, es un puente entre la matemática y la economía, entre el tiempo discreto y el continuo. Stewart (2021) lo llama "el límite que traduce el ritmo natural del crecimiento de la vida".

c. Límite exponencial en el origen

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Este resultado es la contraparte del anterior. Mientras que el exponencial describe un crecimiento ilimitado, el logaritmo refleja un proceso de desaceleración infinita (Figura 23). Juntos, ambos límites expresan la dualidad entre expansión y compresión, o entre lo multiplicativo y lo aditivo (Apostol, 1967).

Figura 23.
Comportamiento exponencial alrededor del origen



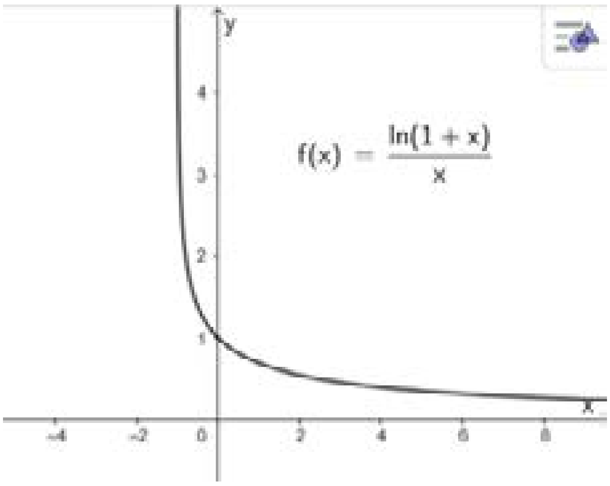
Nota. Elaboración propia

d. **Límite logarítmico**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Este resultado (Figura 24) es la contraparte del anterior. Mientras que el exponencial describe un crecimiento ilimitado, el logaritmo refleja un proceso de desaceleración infinita. Juntos, ambos límites expresan la dualidad entre expansión y compresión, o entre lo multiplicativo y lo aditivo (Apostol, 1967).

Figura 24.
Comportamiento logarítmico alrededor del origen



Nota. Elaboración propia

Además del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1,$$

existe otro de igual relevancia:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Este límite explica la concavidad de la función coseno en torno al origen. En la enseñanza, este caso ofrece la posibilidad de introducir la idea de aproximación cuadrática: a medida que x se hace pequeño, el coseno se aproxima a la parábola

$$y=1-\frac{x^2}{2},$$

lo que anticipa el estudio de las series de Taylor.

Apoyo didáctico: los límites fundamentales cumplen una función de anclaje cognitivo. Al trabajar con ellos, el docente puede construir puentes entre lo intuitivo y lo formal.

Por ejemplo, al analizar el límite

$$\frac{\mathrm{sen(x)}}{\mathrm{x}},$$

el profesor puede pedir a los estudiantes que observen qué sucede con el triángulo inscrito en un círculo unitario a medida que el ángulo disminuye. De este modo, la noción abstracta de límite se transforma en una experiencia tangible y visual.

Hiebert y Grouws (2007) sostienen que los aprendizajes significativos en matemáticas ocurren cuando el estudiante percibe la coherencia entre los procedimientos y las ideas. Los límites fundamentales, enseñados con este enfoque, dejan de ser simples fórmulas para convertirse en herramientas de comprensión del cambio.

Infinitésimos equivalentes

En el estudio del cálculo, los infinitésimos equivalentes representan una de las herramientas más elegantes y conceptualmente profundas para comprender el comportamiento de las funciones en las cercanías de un punto. Estos permiten comparar el grado de "pequeñez" de dos magnitudes que tienden a cero, simplificando el análisis de límites, derivadas y desarrollos locales. Aunque su origen se remonta a los razonamientos intuitivos de Newton y Leibniz, su formalización moderna se encuentra en el análisis asintótico y en el lenguaje de los límites, lo que los convierte en un puente entre la intuición geométrica y el rigor analítico (Stewart, 2021; Apostol, 1967).

Cuando dos expresiones $\mathrm{f(x)}$ y $\mathrm{g(x)}$ se anulan al aproximarse $\mathbf{x}$ a un cierto valor a, pero lo hacen a un ritmo tan similar que su cociente tiende a uno, decimos que son infinitésimos equivalentes.

Formalmente:

$$\mathrm{f(x)} \sim \mathrm{g(x)} \text{ si y solo si } \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{a}} \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = 1.$$

Esta relación no solo indica que ambas funciones tienden a cero, sino que sus "velocidades de anulación" son prácticamente indistinguibles en el límite. Como señala Spivak (1994), "los infinitésimos equivalentes nos permiten sustituir lo complicado por lo esencialmente igual, sin alterar el valor del límite" (p. 123).

Por ejemplo, cuando

$$\mathrm{x} \to 0 \quad \mathrm{sen(x)} \sim \mathrm{x}, \quad \tan(\mathrm{x}) \sim \mathrm{x}, \quad 1 - \cos(\mathrm{x}) \sim \frac{\mathrm{x}^2}{2}.$$

En estos casos, las funciones de la izquierda pueden reemplazarse por sus equivalentes en cálculos de límites sin alterar el resultado final.

Apoyo didáctico: introducir los infinitésimos equivalentes no debe limitarse a un formalismo algebraico. Es fundamental que el estudiante visualice cómo dos curvas se aproximan tan estrechamente en torno a un punto que sus gráficas parecen coincidir. En términos visuales, decir que si $\mathrm{sen}(x) \sim x$, significa que ambas funciones son casi indistinguibles cerca de $x = 0$.

Continuidad y tipos de discontinuidades

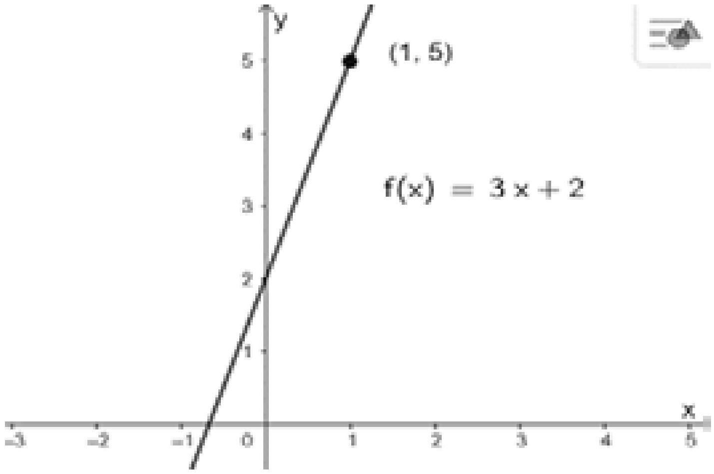
La continuidad es una idea que une el pensamiento geométrico, analítico y fenomenológico del cálculo. Representa la posibilidad de describir procesos sin interrupciones, donde el cambio ocurre de manera suave y progresiva. En términos sencillos, una función es continua si su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel; sin embargo, esta imagen intuitiva se formaliza mediante el lenguaje de los límites: una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si cumple tres condiciones esenciales (Stewart, 2021):

1. $f(a)$ está definida (esto es, a está en el dominio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Este triple criterio, consolidado por Cauchy y Weierstrass, asegura que el comportamiento de la función no se vea interrumpido ni por huecos ni por saltos en la gráfica, ofreciendo una herramienta rigurosa para modelar fenómenos naturales y técnicos.

Ejemplo 18: la función $f(x) = 3x + 2$ es continua para todo número real, pues es un polinomio, y los polinomios según Larson y Edwards (2022), son funciones continuas en todo su dominio. Si tomamos $x = 1$, se verifica que y que $f(1) = 5$; por tanto, no existe ruptura ni ambigüedad en su comportamiento. (Figura 25)

Figura 25.
Continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$



Nota. Elaboración propia

En contraste, la función racional

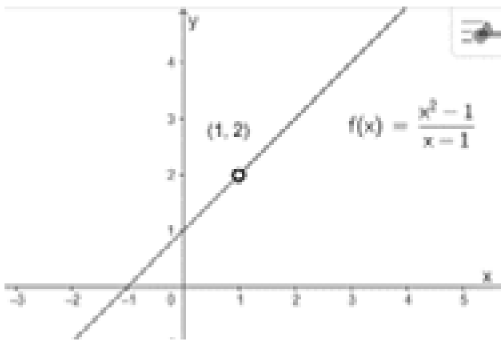
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1},$$

presenta un punto problemático en $x = 1$ (Figura 26). Al sustituir directamente, se obtiene una indeterminación $\frac{0}{0}$. No obstante, al simplificarla como $f(x) = x + 1$ (para $x \neq 1$), observamos que el límite

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

Aunque el valor de la función no está definido en $x = 1$, el límite sí existe; por tanto, se trata de una discontinuidad removible, que puede eliminarse redefiniendo $f(1) = 2$. Este ejemplo ilustra cómo el análisis de continuidad no se limita a detectar errores algebraicos, sino que invita a reflexionar sobre el significado mismo de "suavidad" en el comportamiento funcional.

Figura 26.
Discontinuidad removible en $x = 1$



Nota. Elaboración propia

Para eliminarla, se redefine la función asignando el valor del límite en ese punto: $f(1) = 2$, de modo que la nueva función

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todo su dominio, ya que se ha "rellenado" el vacío del gráfico en $x = 1$.

Otro tipo de ruptura ocurre en las discontinuidades de salto, donde los límites laterales existen, pero son distintos.

Ejemplo 19: Un ejemplo clásico es la función por tramos

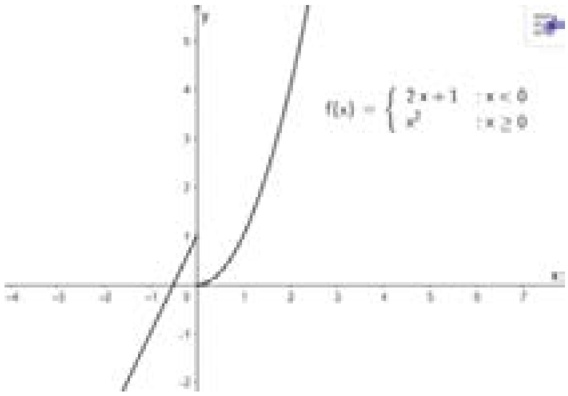
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Al aproximarse a $x = 0$, se obtiene

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

Como ambos límites difieren, existe un salto vertical de una unidad (Figura 27). Esta discontinuidad se observa con claridad al graficarla, y al discutirla en el aula permite que los estudiantes comprendan cómo el cambio en la definición de una función afecta su continuidad. Apostol (1967) enfatiza que estas discontinuidades modelan situaciones reales donde hay un cambio repentino, como una variación de voltaje o un cambio de velocidad en un sistema mecánico.

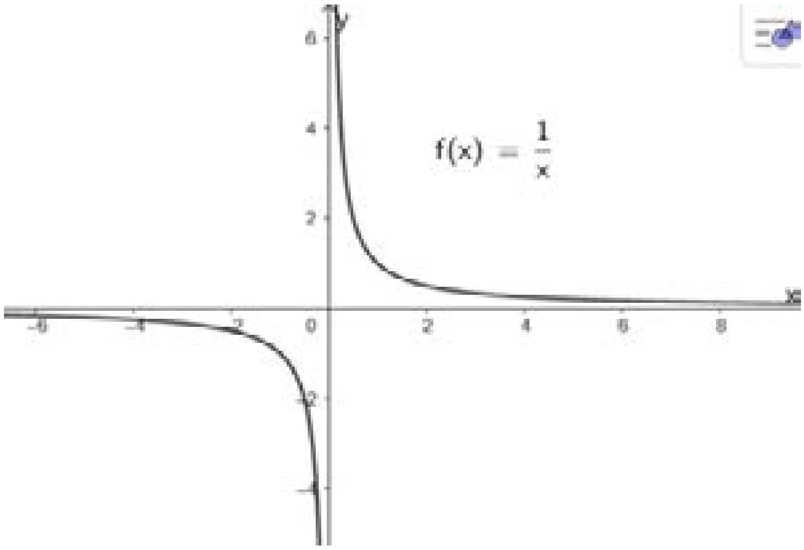
Figura 27.
Discontinuidad de salto en $x = 0$



Nota. Elaboración propia

Un tercer tipo es la discontinuidad infinita, que se produce cuando la función crece sin límite en las cercanías de un punto (Figura 28). Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, ya que al acercarse desde la derecha, los valores se disparan hacia $+\infty$ y desde la izquierda, hacia $-\infty$. La gráfica muestra dos ramas que nunca se tocan, separadas por una asíntota vertical.

Figura 28.
Discontinuidad infinita en $x = 0$



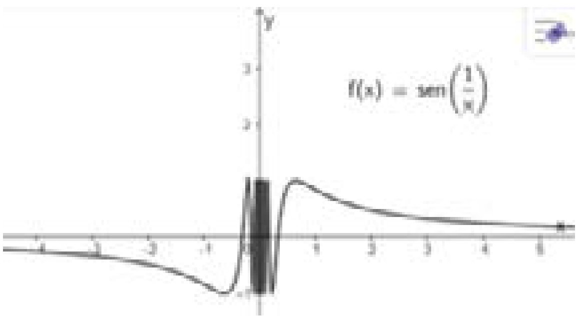
Nota. Elaboración propia

Existen también discontinuidades oscilatorias, menos comunes, pero conceptualmente ricas. Por ejemplo, la función

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$$

no tiene límite cuando $\mathbf{x}$ tiende a 0, ya que sus valores oscilan indefinidamente entre –1 y 1. (Figura 29) No hay tendencia definida, sino una vibración infinita que impide la continuidad.

Figura 29.
Discontinuidad oscilatoria



Nota. Elaboración propia

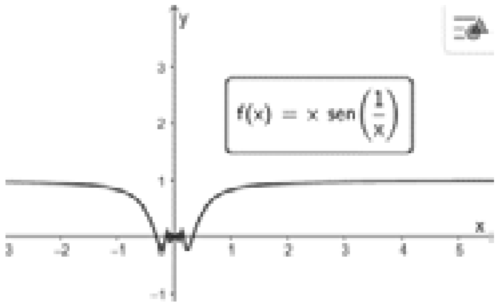
Este caso, analizado por Tall (1992), ayuda a los estudiantes a percibir que no todas las irregularidades se deben a rupturas visibles: algunas surgen del propio comportamiento interno de la función, más allá de la ausencia de definición puntual.

Un caso interesante es la función

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right),$$

que aunque oscila indefinidamente cuando $\mathbf{x}$ tiende a cero, lo hace con una amplitud decreciente. (Figura 30)

Figura 30.
Discontinuidad oscilatoria

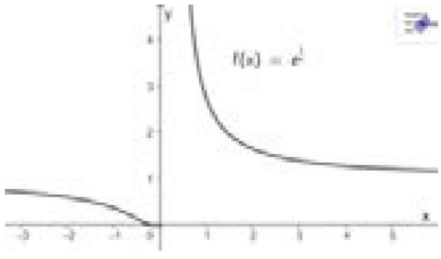


Nota. Elaboración propia

En consecuencia, el límite existe y vale cero. Este ejemplo, analizado en textos como el de Stewart (2021), resulta especialmente útil en la enseñanza porque demuestra que una función puede conservar un comportamiento oscilatorio sin perder la continuidad. En el plano conceptual, este tipo de funciones ayudan a los estudiantes a visualizar cómo la multiplicación por un factor atenuante (en este caso, $\mathbf{x}$) "suaviza" la vibración del seno, haciendo visible la convergencia hacia un punto estable.

Apoyo didáctico: Desde un enfoque pedagógico, enseñar la continuidad y las discontinuidades de funciones trascendentes requiere fomentar la comprensión visual, intuitiva y experimental, antes que la aplicación mecánica de reglas. (Figura 31)

Figura 31.
Representación gráfica en Geogebra



Nota. Elaboración propia

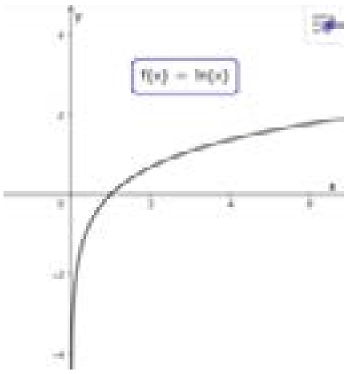
El uso de herramientas digitales como GeoGebra o Desmos favorece que los estudiantes "vean" el comportamiento de las funciones cuando se aproximan a puntos críticos, comprendiendo la noción de límite desde la experiencia. Por ejemplo, al manipular un deslizador en la función exponencial

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

se observa cómo los valores crecen abruptamente cuando x tiende a cero por la derecha, mientras que tienden a cero por la izquierda. Este contraste visual permite entender una discontinuidad infinita asimétrica, típica en funciones de tipo exponencial inversa (Stewart, 2021).

Del mismo modo, la función logarítmica $f(x) = \ln(x)$ ofrece una experiencia significativa al acercarse a $x \to 0^+$. En la gráfica se percibe una caída pronunciada hacia el infinito negativo, lo que posibilita discutir con los estudiantes cómo la continuidad depende del dominio natural de la función (Figura 32).

Figura 32.
Representación gráfica en Geogebra



Nota. Elaboración propia

Tall (1992) señala que este tipo de visualizaciones facilita construir lo que denomina una imagen conceptual del límite, en la que el alumno deja de pensar en la continuidad como "dibujar sin levantar el lápiz" y la comprende como un fenómeno de estabilidad del comportamiento funcional.

Dimensión pedagógica: enseñar el límite desde la experiencia
Enseñar el concepto de límite representa uno de los mayores desafíos del cálculo diferencial. Su naturaleza abstracta, vinculada a la idea de aproximación infinita, suele generar en los estudiantes confusión conceptual y resistencia cognitiva. No obstante, cuando el límite se aborda desde la experiencia, es decir, desde la observación del cambio y la tendencia en fenómenos reales

o simulados, el aprendizaje se transforma en una vivencia de descubrimiento, en la que la intuición se articula con la formalización. En esta dimensión pedagógica, el límite deja de ser una definición estática para convertirse en una relación dinámica entre valores que se aproximan (Cornu, 1991; Tall, 2013).

El concepto de límite constituye una de las ideas más profundas y formativas del pensamiento matemático. Enseñarlo desde la experiencia implica asumir que su comprensión no se reduce a una definición formal, sino que emerge de una vivencia intelectual y sensorial del cambio. En este sentido, la enseñanza del límite debe propiciar que el estudiante experimente la aproximación, observe la tendencia y razone sobre lo que ocurre "cuando nos acercamos indefinidamente" a un valor. Este proceso vivencial convierte la abstracción matemática en una forma de percepción refinada de la realidad (Cornu, 1991; Tall, 2013).

Comprender el límite como experiencia de aproximación

El límite no puede enseñarse como una fórmula aislada; requiere que el estudiante perciba cómo una magnitud se aproxima a un valor sin necesariamente alcanzarlo. Esta vivencia de "aproximarse sin llegar" se convierte en el núcleo cognitivo del concepto. Como señala Tall & Vinner (1981), muchos errores en la comprensión del límite provienen de enseñar su definición antes de que el alumno haya construido la intuición de la tendencia.

Por ejemplo, cuando se observa una secuencia como 1,0.1,0.01,0.001,...1, 0.1, 0.01, 0.001, el estudiante puede experimentar que los términos "se acercan" a cero, aunque nunca lleguen a ser exactamente cero. Esta experiencia perceptiva es la base sobre la cual puede más tarde comprender que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{10^n} = 0.$$

Aquí el límite deja de ser una operación mecánica para convertirse en una manera de pensar el infinito como proceso.

Stewart (2021) sostiene que el límite es la idea que permite pasar de lo finito a lo infinitesimal, de la medida al cambio. Su comprensión surge cuando el estudiante descubre que "el límite no es un punto al que se llega, sino un valor hacia el cual se tiende" (p. 89). Esta diferencia entre llegar y tender, entre alcanzar y aproximarse, constituye la frontera conceptual que debe recorrerse en la enseñanza del cálculo.

La noción de límite como proceso y no como resultado

Uno de los obstáculos más comunes es concebir el límite como un número final, un resultado estático. Sin embargo, su esencia radica en el proceso de acercamiento. Tall (1992) advierte que el pensamiento matemático avanzado requiere superar la visión operacional para acceder a una visión estructural, donde el límite se entiende como relación dinámica. Por ejemplo, al estudiar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x},$$

el foco no debe situarse en obtener “1” como respuesta, sino en observar cómo la razón se estabiliza alrededor de 1 cuando x se aproxima a 0. La experiencia visual y numérica permite que el estudiante vea cómo la función se autoajusta a un valor constante. En ese instante, comprende que el límite expresa una estabilidad en medio del cambio.

El límite no representa solo un destino, sino una tendencia continua que revela la regularidad del fenómeno. Artigue (2009) subraya que enseñar el límite exige reconstruir el sentido del movimiento y del acercamiento, pues “la noción de límite implica una mirada sobre el proceso, no sobre el punto final” (p. 174).

La vivencia del límite a través de la continuidad

La experiencia del límite se hace tangible cuando se relaciona con la idea de continuidad. El estudiante puede observar que, en una función continua, los valores de la variable independiente se aproximan sin saltos ni interrupciones, y que el límite en un punto coincide con el valor de la función. Pero más allá del formalismo, lo esencial es que perciba la suavidad del cambio.

Ejemplo 20: al analizar en un simulador el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

cuando x se aproxima a 1, el estudiante nota que, aunque el punto $x = 1$ está “vacío”, los valores de $f(x)$ alrededor de él se agrupan en torno a 2. Comprende entonces que el límite existe incluso si el valor de la función no está definido en ese punto.

Esa observación lleva a una conclusión profunda: el límite no pertenece necesariamente al dominio de la función; es una construcción del pensamiento, una predicción sobre lo que ocurriría si el proceso continuara (Tall, 2013). Esta interpretación transforma el límite en una herramienta epistémica que permite pensar lo inexistente como posible.

La experiencia del límite en el movimiento

El límite adquiere sentido pleno cuando se vincula con el movimiento, una de las fuentes históricas de su creación. Newton y Leibniz lo concibieron como una manera de describir lo que ocurre instantáneamente en procesos de cambio continuo. Así, el límite surge de la necesidad de expresar lo que ocurre "cuando el tiempo se reduce infinitamente" o "cuando la distancia se vuelve infinitesimal".

Una estrategia pedagógica efectiva consiste en utilizar experimentos de movimiento real o simulado. Por ejemplo, medir cómo varía la velocidad promedio de un objeto en trayectos cada vez más cortos alrededor de un punto. El estudiante descubre que, aunque el intervalo temporal tiende a cero, la razón de cambio se aproxima a un valor constante: la velocidad instantánea. En ese momento, la definición formal del límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

ya no aparece como un artificio algebraico, sino como una traducción simbólica de una experiencia vivida.

El límite como experiencia cognitiva del infinito

Enseñar el límite desde la experiencia implica también acompañar al estudiante en su primer contacto significativo con el infinito. No un infinito estático o metafísico, sino un infinito dinámico, representado en la sucesión interminable de acercamientos. Cornu (1991) describe este tránsito como el "choque cognitivo del infinito", una etapa donde el estudiante debe reconciliar dos ideas opuestas: la imposibilidad de alcanzar un valor y la certeza de poder aproximarse indefinidamente a él.

Esta vivencia exige que el docente fomente la reflexión metacognitiva:

- ¿Por qué nunca se llega al valor?
- ¿Por qué aun así decimos que el límite "existe"?

Estas preguntas permiten descubrir que el límite no depende del punto alcanzado, sino del comportamiento del proceso. En palabras de Tall (2013), el límite es "una visión del infinito domesticado por el razonamiento" (p. 91).

Enseñar el límite como pensamiento relacional
Desde una perspectiva pedagógica profunda, enseñar el límite desde la experiencia implica guiar al estudiante hacia la comprensión de que el límite es una relación entre variables, no un valor aislado. Su sentido surge en la interacción entre lo que cambia y lo que permanece. En este contexto, la enseñanza del límite se vuelve una oportunidad para desarrollar el pensamiento relacional, una forma de razonamiento que trasciende la manipulación simbólica para situarse en la comprensión estructural.

Conclusiones

El recorrido por los fundamentos del cálculo y la noción de límite nos permite comprender que esta rama de la matemática no es solo un conjunto de fórmulas o reglas, sino una forma profunda de pensar el cambio y la continuidad. A lo largo del capítulo se mostró cómo el límite se convierte en la idea central del razonamiento matemático moderno, porque nos enseña a entender procesos que se aproximan, crecen o decrecen sin llegar necesariamente a un punto final. El cálculo, en este sentido, nos ofrece una mirada más precisa y al mismo tiempo más sensible del mundo, al permitir describir fenómenos naturales, físicos o sociales desde la lógica de la variación. Comprender el límite es, en esencia, aprender a razonar sobre lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, sobre lo que se acerca sin alcanzarse y, aun así, puede medirse y explicarse con rigor.

Desde una perspectiva pedagógica, este capítulo deja claro que enseñar cálculo no debe reducirse a repetir procedimientos, sino a generar experiencias de comprensión. Cuando el estudiante logra visualizar cómo una función se aproxima a un valor, cómo un cambio se estabiliza o cómo una curva se suaviza, el aprendizaje adquiere sentido y profundidad. El uso de recursos gráficos, tecnológicos y ejemplos cercanos a la realidad favorece que el límite deje de ser una idea abstracta y se convierta en una experiencia intelectual concreta. En última instancia, este capítulo invita a mirar el cálculo como una forma de pensamiento que une razón e intuición, precisión y asombro, ayudando a formar una mente capaz de interpretar el cambio con claridad, lógica y sensibilidad.

Referencias

Apostol, T. M. (1967). Calculus, Volume I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra. Wiley.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Ed.), Nordic research in mathematics education: Proceedings from NORMA08 (pp. 7–16). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087907839_003

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 45–58.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. (2011). A history of mathematics (3rd ed.). Wiley.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 153–166). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Edwards, C. H. (1979). The historical development of the calculus. Springer.

Grabiner, J. V. (1981). The origins of Cauchy's rigorous calculus. MIT Press.

Guicciardini, N. (2018). Isaac Newton on mathematical certainty and method. MIT Press.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 65–97). Macmillan.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 1, 371–404.

Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 77–156). Lawrence Erlbaum Associates.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2022). Cálculo: Trascendentes tempranas (10.ª ed.). Cengage Learning.

Spivak, M. (1994). Calculus (3rd ed.). Publish or Perish.

Stewart, J. (2021). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (9.ª ed.). Cengage Learning.

Tall, D. (1980). The notion of limit in students' concept images. Educational Studies in Mathematics, 11(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00368334

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. Macmillan.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 41(4), 481–492. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0192-6

Tall, D. (2013). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press.

Tall, D. (2019). Building theories: The three worlds of mathematics. For the Learning of Mathematics, 39(3), 18–24.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Capítulo II

Derivada: análisis del cambio y variación de las funciones

Introducción

La noción de derivada marca un punto de inflexión en la historia del pensamiento matemático, pues transforma la idea de cambio en un objeto cuantificable. Mientras el concepto de límite proporciona las bases para comprender la continuidad, la derivada permite estudiar cómo varía una magnitud en un instante determinado. Su desarrollo fue una respuesta a preguntas que la humanidad se había hecho durante siglos: ¿cómo medir la velocidad de un cuerpo en movimiento?, ¿cómo determinar el punto más alto o más bajo de una curva?, ¿cómo describir la variación instantánea de un fenómeno natural o social? Desde las reflexiones geométricas de Fermat y los razonamientos infinitesimales de Newton y Leibniz, el cálculo diferencial se ha convertido en un lenguaje universal para analizar el cambio, ofreciendo modelos que explican la dinámica del mundo físico, biológico y tecnológico.

El estudio de la derivada en este capítulo se organiza a partir de su fundamento conceptual y su interpretación geométrica. Se inicia con la definición de la derivada como límite del cociente incremental, para luego explorar su representación como pendiente de la recta tangente y su relación con la dirección del cambio de una función. Posteriormente, se abordan las reglas básicas de derivación y su aplicación a funciones algebraicas y trascendentes, así como las derivadas de orden superior, que permiten analizar comportamientos más complejos como la curvatura o la aceleración. Cada apartado busca articular el razonamiento algebraico con la comprensión visual, de modo que el estudiante no solo aplique procedimientos, sino que comprenda el sentido del cambio y su relación con la forma y el crecimiento de las funciones.

Desde una perspectiva didáctica, este capítulo propone integrar la exploración gráfica y simbólica con el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra o Desmos, que facilitan la visualización de la derivada y su interpretación en contextos reales. La derivada deja de ser vista únicamente como un algoritmo para transformarse en un concepto que explica fenómenos de la vida cotidiana: el aumento o disminución de una población, la velocidad de un vehículo, la rentabilidad de una inversión o la propagación de una señal. De esta manera, se fomenta una comprensión profunda, dinámica y significativa del cálculo, orientada no solo a la resolución de problemas, sino también a la construcción de una mirada crítica sobre el cambio y la variación en los distintos campos del conocimiento.

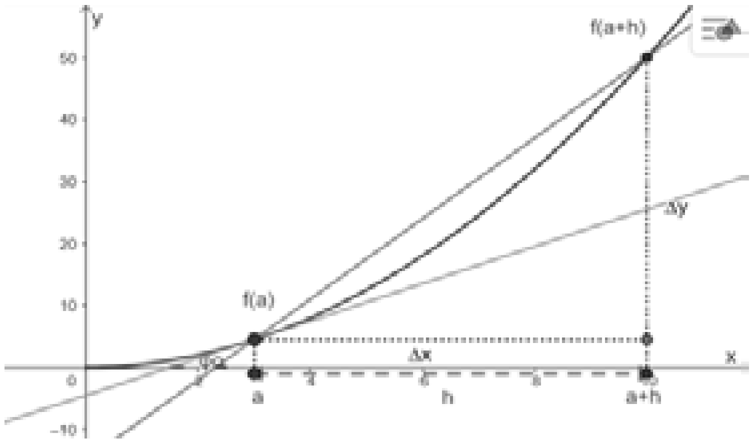
La derivada como límite del cociente incremental

La derivada surge de la necesidad de medir con precisión el cambio instantáneo, una idea que marcó uno de los mayores logros del pensamiento matemático. Mientras el álgebra permite calcular variaciones entre puntos distantes, el cálculo diferencial busca capturar lo que ocurre en un instante infinitesimal: el momento exacto en que algo crece, decrece o se transforma. Esta noción se formaliza a través del límite del cociente incremental, expresión que representa la razón de cambio promedio entre dos puntos cada vez más cercanos sobre una curva. Así, si una función $f(x)$ describe un fenómeno continuo, la derivada en un punto $x = a$ se define como

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

siempre que dicho límite exista (Figura 1). Esta formulación expresa la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(\mathrm{a}, \mathrm{f}(\mathrm{a}))$, y constituye el corazón del análisis del cambio. En palabras de Stewart (2021), la derivada no solo mide la rapidez con que una cantidad varía, sino que revela la estructura interna del movimiento, la dirección del crecimiento y la sensibilidad de una función ante pequeñas modificaciones en su variable.

Figura 1.
Límite del cociente incremental de $f(x)$*en* $x = a$



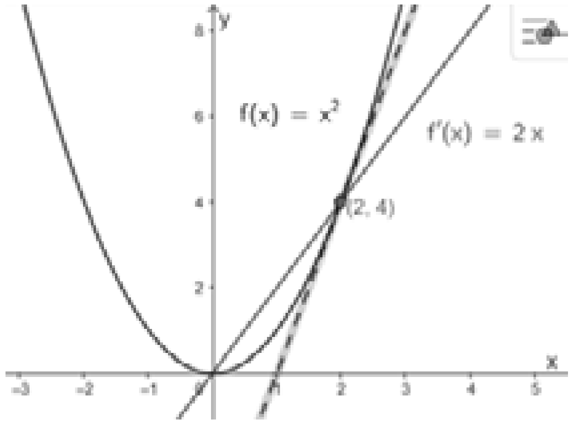
Nota. Elaboración propia

El concepto de derivada tiene raíces históricas profundas. Fermat, en el siglo XVII, exploró métodos para hallar máximos y mínimos sin conocer aún la noción de límite, mientras que Newton y Leibniz, de manera independiente, formalizaron el cálculo infinitesimal para estudiar el movimiento de los cuerpos celestes y los fenómenos naturales (Boyer, 2011). Newton concibió la derivada como una razón de velocidades, vinculada al cambio en el tiempo, mientras que Leibniz la interpretó como una relación entre diferenciales infinitesimales, lo que dio origen a la notación aún utilizada.

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$$

Estas visiones convergieron en una misma intuición: el cambio continuo puede ser descrito matemáticamente mediante un límite, una idea que siglos más tarde sería rigurosamente formulada por Cauchy y Weierstrass. Larson y Edwards (2022) señalan que esta evolución histórica demuestra cómo la derivada no nació de una definición formal, sino de una necesidad intelectual: comprender el comportamiento de la naturaleza a través de sus variaciones. Comprender la derivada como límite implica, por tanto, entenderla como una transición conceptual: se pasa de una razón promedio a una razón instantánea. (Figura 2)

Figura 2.
Límite del cociente incremental de $f(x)$*en* $x = a$



Nota. Elaboración propia

Ejemplo 1: consideremos la función $\mathrm{f(x) = x^2}$. Si se analiza la variación de $\mathrm{f(x)}$ entre los puntos $\mathrm{x = 2}$ y $\mathrm{x = 2 + h}$, el cociente incremental es

$$\frac{\mathrm{f(2+h)-f(2)}}{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{(2+h)^2-4}}{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{4+4h+h^2-4}}{\mathrm{h}} = 4 + \mathrm{h}$$

Al hacer h cada vez más pequeño, el término h tiende a cero, y el límite resulta ser 4. Así, la derivada de $\mathrm{f(x) = x^2}$, lo que indica que la pendiente de la tangente en ese punto es 4. Este valor expresa el ritmo exacto de cambio de la función en ese instante, mostrando cómo la derivada actúa como un "microscopio matemático" que revela la variación puntual de una magnitud (Thomas et al., 2024).

Definición función derivable
Sea f una función definida en un intervalo abierto y $\mathrm{x_0}$ un punto de ese intervalo. Se dice que f es derivable en dicho punto $\mathrm{x_0}$ si existe el límite:

$$\lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{\mathrm{f(x_0+\Delta x)-f(x)}}{\Delta \mathrm{x}},$$

y en este caso se denomina derivada de f en $\mathrm{x_0}$ y se denota por: $\mathrm{f'(x_0)}$.

Otra notación usada en la práctica es Notación de Leibniz

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Si f es derivable en un punto x_0, la derivada de f en dicho punto, que denotaremos por $f'(x_0)$, es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva definida por $y = f(x)$ en dicho punto x_0. Por tanto la ecuación de la recta tangente viene dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ejemplo 2: Podemos calcular la derivada de $f(x)$ en un punto por ejemplo (3,- 6) donde $f(x)$ se defina como: $f(x) = x^2 - 8x + 1$. (Figura 3)

Sea $a = 3$ la abscisa de P(3 ,- 6), entonces:

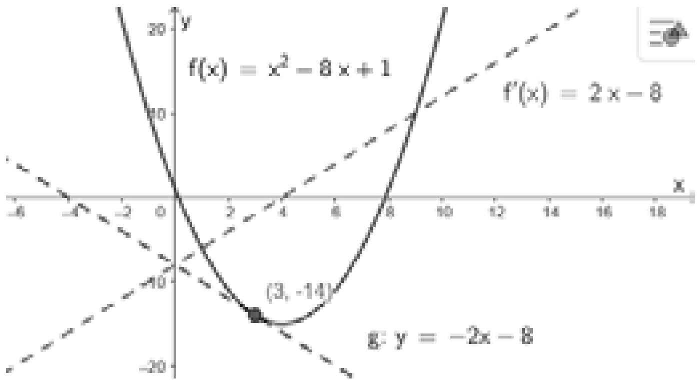
$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[(a+h)^2-8(a+h)+1\right]-\left[a^2-8a+1\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-8a-8h+1-a^2+8a-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-8h}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h-8) = 2a-8$$

por tanto $f'(3) = -2$, de ahí que la recta en el punto P tiene pendiente -2.

Figura 3.
Derivada de $f(x)$ en un punto (3,- 6)



Nota. Elaboración propia

En la práctica, este razonamiento se extiende a múltiples contextos. En física, la derivada de la posición respecto al tiempo define la velocidad instantánea; en economía, la derivada del costo o del ingreso respecto a la cantidad producida permite estudiar la productividad marginal; en biología, la derivada de una función de crecimiento celular describe el ritmo de reproducción en un instante específico. Así, la derivada se convierte en un instrumento de lectura del cambio, capaz de conectar las leyes del movimiento, el crecimiento y la optimización con su representación matemática. Apostol (1967) afirma que la potencia del cálculo radica en su universalidad: el mismo razonamiento que explica la aceleración de un cuerpo sirve para analizar el comportamiento de una función logística o el flujo de información en un circuito electrónico.

Apoyo didáctico: enseñar la derivada como límite del cociente incremental exige un enfoque visual y experimental. Es fundamental que el estudiante observe cómo la secante entre dos puntos de una curva se convierte progresivamente en una tangente al acercar ambos puntos entre sí. GeoGebra y Desmos permiten visualizar este proceso dinámicamente, mostrando cómo la pendiente promedio se transforma en una pendiente instantánea. Tall (1992) sugiere que este tránsito de lo intuitivo a lo formal es decir de la percepción del cambio a su expresión simbólica, es esencial para desarrollar una comprensión profunda del cálculo.

Interpretación geométrica: pendiente, tangente y dirección de cambio

El concepto de derivada, piedra angular del cálculo diferencial, alcanza su comprensión más profunda cuando se interpreta geométricamente. Desde la perspectiva visual, la derivada de una función en un punto expresa la pendiente de la recta tangente a su gráfica en ese lugar. Esta idea, aparentemente sencilla, contiene la esencia misma del cálculo: cuantificar cómo una magnitud cambia en un instante infinitesimal. Así, el estudio de la pendiente y la tangente no es una cuestión meramente algebraica, sino una ventana hacia la comprensión del movimiento, el crecimiento, la oscilación y la transformación de los fenómenos naturales y sociales (Stewart, 2021).

Cuando se observa una función en el plano cartesiano, la forma de su curva revela su historia de cambio. Si una función crece, su pendiente es positiva; si decrece, es negativa; si se mantiene constante, la pendiente es cero. La derivada $f'(x_0)$ expresa precisamente esa inclinación en el punto x_0, es decir, la dirección y magnitud del cambio instantáneo. En términos geométricos, la pendiente puede definirse como el límite del cociente incremental:

Esta definición permite pasar del cálculo de una razón media de cambio a una razón instantánea, lo que equivale a reemplazar la secante por la tangente, que representa el comportamiento de la función en un único punto. Como explica Apostol (1967), esta transición es un acto conceptual: el paso de lo finito a lo infinitesimal, del intervalo al punto, de la variación al instante.

Apoyo didáctico: visualizar esta relación es esencial para el aprendizaje del cálculo. Artigue (2009) subraya que la enseñanza tradicional del límite y la derivada suele quedar atrapada en la manipulación simbólica, mientras que los estudiantes comprenden de forma más natural el cambio si pueden representarlo gráficamente y observar cómo las rectas secantes se transforman en tangentes. Por ello, la interpretación geométrica no solo refuerza la comprensión conceptual, sino que propicia una experiencia cognitiva del cambio: ver cómo una función "se mueve" en torno a un punto y cómo la pendiente se convierte en el indicador más preciso de esa dinámica.

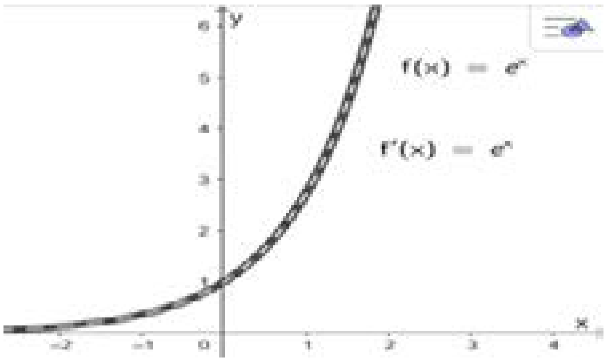
La dirección de cambio se manifiesta en la orientación de la tangente: ascendente cuando la función aumenta, descendente cuando disminuye. La magnitud de esa inclinación mide la intensidad del cambio. Cuando la derivada es grande, el fenómeno varía rápidamente; cuando es pequeña, el cambio es lento o casi nulo. Este enfoque permite comprender la derivada como un lenguaje geométrico universal para describir procesos de la realidad: velocidad en física, crecimiento en biología, productividad marginal en economía o intensidad de respuesta en ingeniería.

Para comprender más profundamente esta relación entre pendiente, tangente y dirección de cambio, resulta especialmente enriquecedor analizar funciones trascendentes, pues ellas exhiben comportamientos no lineales que desafían la intuición inicial del estudiante y lo obligan a construir significados más elaborados.

Ejemplo 3: la función $f(x) = e^x$ representa el paradigma del crecimiento continuo. Su derivada, $f'(x) = e^x$, indica que la pendiente de la tangente en cada punto coincide exactamente con el valor de la función. (Figura 4)

Geométricamente, esto significa que la dirección de cambio crece a la misma velocidad con que la función se eleva. En el plano, las tangentes a la curva son cada vez más inclinadas a medida que se avanza hacia la derecha: lo que comienza como un ascenso moderado se convierte en una elevación casi vertical.

Figura 4.
Crecimiento continuo de $f(x)$



Nota. Elaboración propia

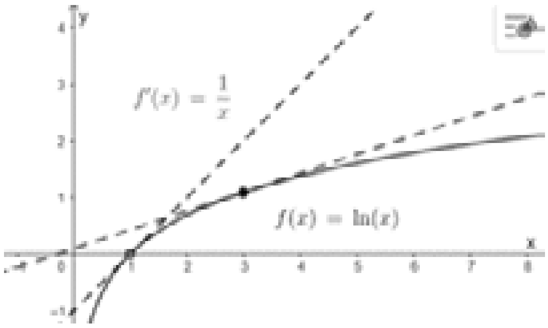
Este comportamiento tiene implicaciones fenomenológicas profundas: en biología modela el crecimiento poblacional sin límites; en economía, el interés compuesto; en física, el aumento exponencial de una reacción en cadena.

En contraste, la función $\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x})$ ilustra el comportamiento opuesto. Su derivada

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}}$$

expresa un crecimiento cada vez más lento a medida que aumenta $\mathbf{x}$ (Figura 5). Geométricamente, las tangentes en los puntos cercanos a $\mathrm{x} = 1$ son inclinadas, pero conforme la función avanza hacia la derecha, se aplanan gradualmente. La dirección de cambio sigue siendo positiva, pero la pendiente se reduce hasta acercarse a cero.

Figura 5.
Comportamiento aplanado de $f'(x)$



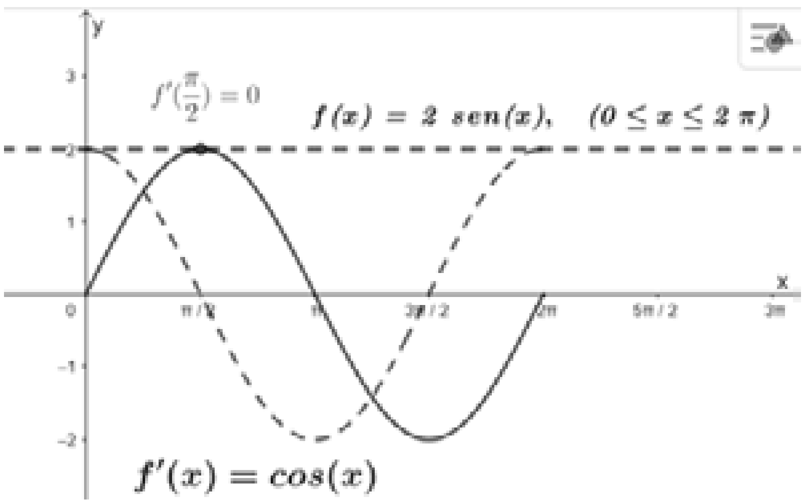
Nota. Elaboración propia

Esta función encarna la noción de rendimientos decrecientes: al principio, el cambio es rápido, pero con el tiempo los incrementos se vuelven mínimos. En contextos reales, este patrón describe procesos de aprendizaje, saturación o amortiguación. Didácticamente, permite explorar cómo una derivada positiva no siempre implica un crecimiento notable, y cómo el valor de la pendiente traduce visualmente la intensidad de la variación (Biza et al., 2018). El estudiante comprende así que la pendiente no solo señala dirección, sino también ritmo, y que el cambio puede volverse casi imperceptible sin dejar de ser positivo.

El caso de la función $\mathbf{f(x) = sen(x)}$ ofrece una interpretación geométrica especialmente rica. Su derivada, $\mathbf{f'(x) = cos(x)}$, muestra que la pendiente oscila entre -1 y 1. La curva del seno sube y baja periódicamente, y las tangentes acompañan ese movimiento con inclinaciones que cambian continuamente de signo. Cuando el seno alcanza un máximo o un mínimo, la tangente es horizontal (pendiente cero); cuando cruza el eje $\mathbf{x}$, la pendiente es máxima o mínima.

Esta relación entre función y derivada (Figura 6) revela una sincronía geométrica: el coseno está siempre adelantado un cuarto de ciclo respecto al seno. En el plano cartesiano, ello se traduce en una correspondencia dinámica entre posición y velocidad.

Figura 6.
Comportamiento oscilatorio de la pendiente



Nota. Elaboración propia

Apoyo didáctico: esta dualidad no solo tiene valor matemático, sino que constituye un modelo conceptual del cambio periódico, presente en los movimientos ondulatorios, las oscilaciones eléctricas o las vibraciones mecánicas. Según Tall

(1993), el estudio del seno y el coseno es una oportunidad pedagógica para conectar la derivada con la intuición física del cambio, permitiendo que los estudiantes asocien las nociones de pendiente, velocidad y dirección con experiencias visuales.

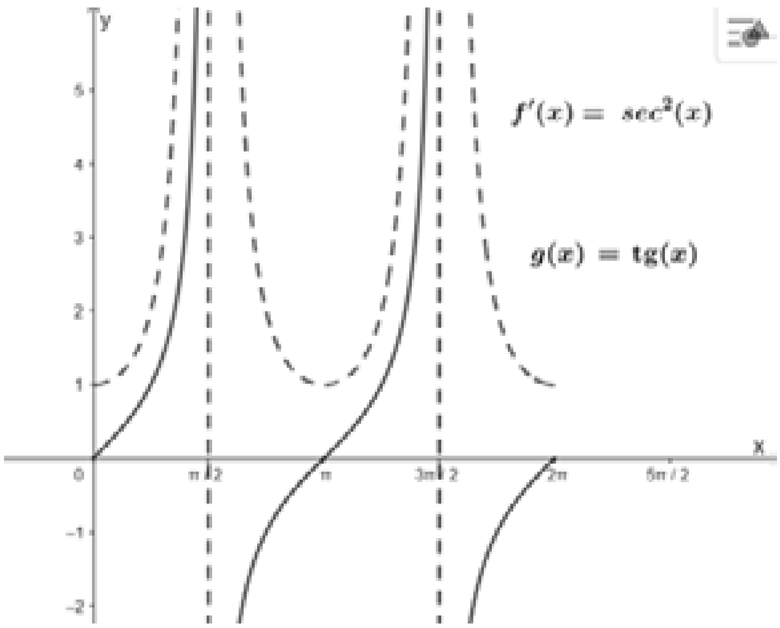
Además, la función seno ejemplifica que el cambio no es siempre progresivo ni acumulativo, sino reversible y cíclico. En cada punto de la curva, la pendiente indica no solo cuánto se modifica la magnitud, sino hacia dónde se orienta ese cambio. Esta dimensión direccional de la derivada permite extender el razonamiento a fenómenos donde la variación implica alternancia, equilibrio o ritmo, aspectos fundamentales para la comprensión del mundo natural.

La función $\mathrm{f(x) = tan(x)}$ constituye un caso fascinante para explorar la noción de dirección de cambio extrema (Figura 7). Su derivada, $\mathrm{f'(x) = sec^2(x)}$, se hace cada vez mayor conforme x se aproxima a los puntos de discontinuidad

$$\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi$$

Geométricamente, esto significa que las pendientes de las tangentes se incrementan sin límite, volviéndose prácticamente verticales. La función expresa así un comportamiento en el que el cambio instantáneo se descontrola, aproximándose a la infinitud.

Figura 7.
Comportamiento infinito de las pendientes de la tangente



Nota. Elaboración propia

Visualizar esta situación en el plano permite discutir con los estudiantes la idea de pendiente infinita y su relación con las asíntotas verticales. No se trata de una noción trivial: implica aceptar que una función puede cambiar tan rápidamente que su dirección de cambio deja de ser mensurable en términos finitos. Apostol (1967) explica que esta propiedad fue una de las motivaciones históricas para formalizar el concepto de límite. En este sentido, la función tangente no solo enseña cálculo, sino que recrea su origen histórico: la necesidad de comprender lo inabarcable.

Apoyo didáctico: Tall (1993) y Artigue (2009) coinciden en que la comprensión del cálculo se consolida cuando el estudiante transita del pensamiento operacional (centrado en reglas y algoritmos) al pensamiento estructural (capaz de visualizar el cambio como una forma). En este tránsito, la interpretación geométrica actúa como puente cognitivo entre el símbolo y la experiencia. Herramientas tecnológicas como GeoGebra y Desmos potencian este enfoque, ya que permiten experimentar el cambio en tiempo real: ver cómo la recta tangente se desplaza, cómo su pendiente varía y cómo el número derivado cobra sentido visual y narrativo.

El aprendizaje de la derivada, por tanto, no se agota en calcular pendientes. Supone desarrollar una sensibilidad geométrica para percibir la dirección del cambio en el espacio y en el tiempo. Cuando el estudiante logra asociar una función con su comportamiento gráfico, y la pendiente con la historia de su variación, ha dado un paso esencial en el dominio del pensamiento matemático avanzado. La derivada se convierte entonces en un modo de mirar el mundo: un lenguaje visual y conceptual del cambio continuo, capaz de explicar la armonía entre las leyes matemáticas y los procesos de la realidad.

Reglas básicas de derivación y derivadas de funciones algebraicas y trascendentes

El paso desde la comprensión conceptual de la derivada hacia su dominio técnico requiere reconocer que cada regla de derivación encierra una lógica del cambio. Las reglas no son simples recetas algorítmicas, sino expresiones condensadas de propiedades estructurales del límite. Como señala Stewart (2021), derivar una función equivale a analizar cómo el cambio en una magnitud afecta el comportamiento de otra dentro de una relación funcional. De esta manera, el cálculo se convierte en una gramática simbólica del movimiento y de la variación.

En el ámbito didáctico, enseñar las reglas de derivación implica promover un aprendizaje que vaya más allá de la mecanización. Artigue (2009) advierte que muchos estudiantes aprenden a derivar sin comprender, porque asocian la derivada con una secuencia operativa y no con una construcción teórica basada en el límite. En consecuencia, es indispensable que las reglas sean presentadas como manifestaciones del concepto de razón de cambio y no como fórmulas independientes. En otras palabras, derivar debe entenderse como pensar el cambio dentro de una estructura formal coherente.

La regla de la potencia y la intuición del crecimiento

La regla de la potencia es una de las más fundamentales y, al mismo tiempo, una de las más reveladoras desde el punto de vista del aprendizaje. Si $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

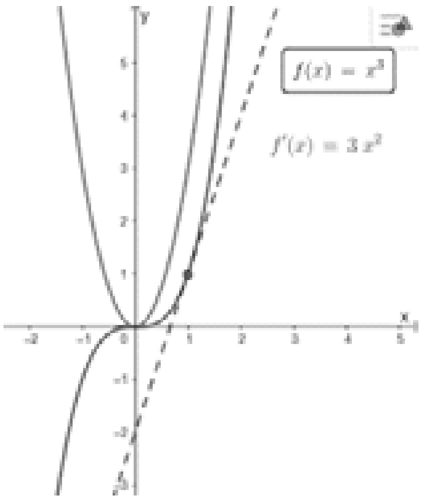
Esta fórmula encierra una verdad geométrica: la pendiente de la curva $y = x^n$ en cada punto depende proporcionalmente de la potencia inmediata inferior. En términos visuales, cuanto mayor es el exponente, más rápido crece la pendiente conforme uno se aleja del origen.

Ejemplo 4: en $f(x) = x^3$, la derivada $f'(x) = 3x^2$ indica que la inclinación aumenta cuadráticamente con x; mientras que en $f(x) = x^{1/2}$, la derivada

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

revela que la pendiente disminuye conforme x crece, tendiendo a infinito cuando x se aproxima a cero (Figura 8) .

Figura 8.
Regla de la potencia



Nota. Elaboración propia

Esta dualidad permite reflexionar sobre el ritmo del cambio: unas funciones se aceleran, otras se desaceleran, pero todas obedecen la misma ley estructural.

Larson y Edwards (2022) destacan que la regla de la potencia, por su simplicidad, es una puerta de entrada para comprender el comportamiento local de las funciones. A través de su aplicación a polinomios, el estudiante aprende que cada término de una función puede analizarse por separado y que el cambio total se obtiene como la suma de los cambios parciales. Esta observación, que parece trivial, encierra el principio de superposición del cambio, un concepto que reaparecerá en el estudio de la integral como suma de variaciones infinitesimales.

La regla del producto y la regla del cociente: interacción y compensación

Cuando dos funciones dependen simultáneamente de la misma variable, sus variaciones se entrelazan. De allí surgen las reglas del producto y del cociente, que revelan cómo el cambio en una función afecta a la otra. La regla del producto se expresa como:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Esta relación puede interpretarse geométricamente como la suma de dos efectos: el cambio de la primera función cuando la segunda se mantiene fija, y el cambio de la segunda cuando la primera se mantiene constante. En modelos físicos o económicos, este principio traduce la interacción entre factores: el cambio total es la suma de los cambios parciales ajustados por los valores actuales de las variables.

De manera análoga, la regla del cociente expresa una dinámica de compensación:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Aquí, el signo negativo del numerador muestra que cuando el numerador y el denominador cambian en el mismo sentido, su efecto en la razón puede atenuarse o incluso invertirse. Esta estructura refleja una intuición de equilibrio: los cambios proporcionales en el numerador y el denominador pueden neutralizarse. Tall (1993) sugiere que este tipo de relaciones son cognitivamente desafiantes para el estudiante, porque implican coordinar dos procesos de variación simultáneos, algo que requiere una comprensión relacional más que aritmética.

La regla de la cadena: la estructura profunda del cambio

Entre todas las reglas de derivación, la regla de la cadena representa la forma más pura de la dependencia funcional. Si una variable y depende de otra u, y esta a su vez depende de $\mathbf{x}$, entonces el cambio total de y con respecto a $\mathbf{x}$ es el producto de los cambios intermedios:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

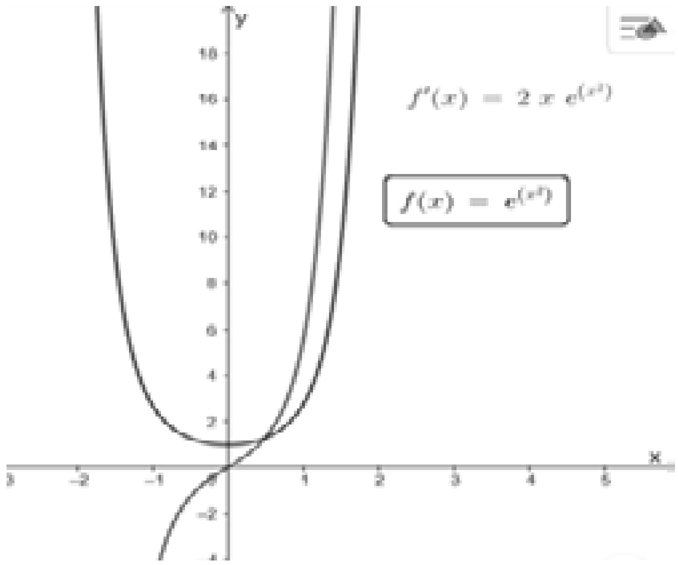
Ejemplo 5: si $f(x) = e^{x^2}$, la derivada $f'(x) = 2xe^{x^2}$

El exponente $\mathbf{x}^2$ actúa como un mediador: el cambio en $\mathbf{x}$ se amplifica por la derivada del exponente, y luego se proyecta sobre la derivada de la función exponencial. Desde una visión geométrica, la regla de la cadena describe cómo un estiramiento o contracción del eje $\mathbf{x}$ se traduce en una deformación proporcional en la pendiente de la curva.

Artigue (2009) subraya que esta regla no solo tiene un valor algebraico, sino epistemológico: introduce al estudiante en el pensamiento funcional jerárquico, donde cada nivel de dependencia genera un efecto sobre los demás.

Comprender la regla de la cadena es comprender que el cambio no ocurre en aislamiento, sino dentro de sistemas interconectados. (Figura 9)

Figura 9.
Regla de la cadena



Nota. Elaboración propia

Derivadas de funciones algebraicas: el cambio modelado por la forma

Las funciones polinomiales permiten visualizar el cambio como una construcción acumulativa. Cada término $a_n x^n$, aporta una contribución específica al ritmo global de variación. Por ejemplo, si

$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 5$, entonces $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 5$.

La derivada es también un polinomio, pero de grado inferior, lo cual sugiere que el cambio es siempre menos complejo que la forma original: la variación "simplifica" la estructura, eliminando una capa de crecimiento.

Este fenómeno, señalado por Stewart (2021), ilustra la idea de que el cálculo no destruye la forma, sino que la interpreta a otro nivel.

En el caso de las funciones racionales, la derivada incorpora la noción de compensación.

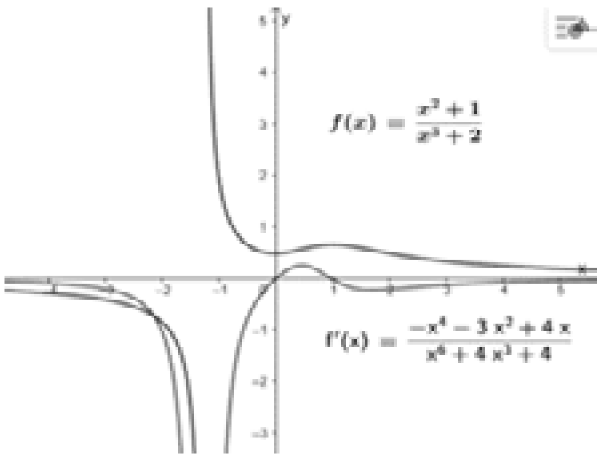
Ejemplo 6: Si

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+2}$, entonces $f'(x) = \frac{2x(x^3+2) - (x^2+1)(3x^2)}{(x^3+2)^2}$.

La complejidad del resultado refleja la interacción entre el crecimiento del numerador y el del denominador (Figura 10).

Geométricamente, este tipo de funciones muestran regiones donde la dirección del cambio puede invertirse, fenómeno que en el aula resulta valioso para discutir el concepto de monotonía y el comportamiento asintótico de las funciones.

Figura 10.
Comportamiento asintótico de $f(x)$



Nota. Elaboración propia

Derivadas de funciones trascendentes: la geometría del cambio en la naturaleza

Las funciones trascendentes introducen una nueva forma de pensar la derivada: no como una simple pendiente numérica, sino como una expresión de ritmo, dirección y naturaleza del cambio. En ellas, la derivada se convierte en una narrativa del comportamiento del fenómeno representado: unas funciones crecen sin límite (exponenciales), otras se estabilizan (logarítmicas o hiperbólicas), y otras oscilan (trigonométricas), cada una describiendo patrones que se repiten en los sistemas físicos, biológicos y sociales.

Tabla 1.
Derivadas de funciones trascendentes

Tipo de función	**Función f(x)**	**Derivada f'(x)**	**Interpretación geométrica / significado del cambio**
Exponencial natural	e^x	e^x	La pendiente en cada punto coincide con el valor de la función; el cambio crece de forma proporcional a su magnitud actual.
Exponencial general	$a^x, a > 0, a \neq 1$	$a^x \ln(a)$	La pendiente es proporcional al valor de la función, escalada por ln(a).
Logarítmica natural	$\ln(x), x > 0$	$\frac{1}{x}$	El cambio es positivo pero decreciente; la función crece cada vez más lentamente.
Logarítmica general	$\log_a(x), a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	Similar a la anterior, pero el ritmo depende de la base a.
Seno	$\mathrm{sen}(x)$	$\cos(x)$	La pendiente alterna entre positiva y negativa; el cambio es cíclico y periódico.

Coseno	$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	El cambio tiene signo opuesto al seno; la función desciende cuando el seno asciende.
Tangente	$\tan(x)$	$\sec^2(x)$	La pendiente aumenta sin límite cerca de las asíntotas; el cambio puede volverse infinito.
Cotangente	$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$	Disminuye continuamente; refleja una variación inversa respecto a la tangente.
Secante	$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$	La pendiente se amplifica según la combinación de la función y su razón tangencial.
Cosecante	$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$	Cambio negativo y proporcional al producto con su cotangente.
Seno hiperbólico	$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x)$	Crece exponencialmente sin periodicidad; modela curvas de suspensión o hipérbolas.
Coseno hiperbólico	$\cosh(x)$	$\operatorname{senh}(x)$	Aumenta continuamente; su cambio refleja simetría hiperbólica.
Tangente hiperbólica	$\tanh(x)$	$\operatorname{sech}^2(x)$	Su pendiente tiende a cero al aproximarse a ±1; cambio autorregulado.

Nota. Elaboración propia.

En la enseñanza del cálculo, Stewart (2021) y Larson y Edwards (2022) coinciden en que estas funciones deben ser presentadas a través de su dimensión visual y fenomenológica, de modo que el estudiante pueda vincular la forma de la curva con el sentido de su variación. Tall (1993) subraya que el aprendizaje de las derivadas trascendentes favorece el desarrollo de un pensamiento analítico superior, capaz de reconocer la regularidad en el cambio.

Razones de cambio

Comprender la idea de razón de cambio significa adentrarse en el corazón mismo del cálculo diferencial. En su sentido más profundo, este concepto traduce la intuición humana del movimiento, la transformación y el crecimiento en un lenguaje matemático capaz de describir la dinámica del mundo. La razón de cambio expresa cómo una magnitud se modifica respecto a otra, y su formulación moderna constituye uno de los logros intelectuales más importantes de la historia de la ciencia. En palabras de Stewart (2021), el cálculo "proporciona la gramática de la naturaleza", pues convierte en expresión formal aquello que percibimos como variación: la velocidad de un cuerpo, la pendiente de una curva o la aceleración de un proceso biológico.

El estudio de las razones de cambio hunde sus raíces en la necesidad humana de medir la transformación. Ya los filósofos griegos reflexionaban sobre el cambio, pero carecían de un lenguaje cuantitativo para describirlo. Zenón de Elea, en sus célebres paradojas, se preguntaba cómo era posible que Aquiles alcanzara a la tortuga si el movimiento podía dividirse infinitamente; sin embargo, ese problema no pudo resolverse hasta la aparición del concepto de límite. Con Galileo Galilei, el pensamiento científico dio un paso decisivo: al estudiar la caída libre, introdujo la noción de velocidad promedio como razón entre espacio y tiempo, reconociendo que la velocidad no era constante, sino cambiante. Aunque su método era empírico, Galileo sentó las bases del razonamiento diferencial al asociar la variación física con una proporción matemática (Boyer & Merzbach, 2011).

El salto conceptual definitivo llegó con Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz en el siglo XVII. Ambos comprendieron que el cambio continuo podía representarse mediante relaciones infinitesimales. Newton lo llamó "fluxión": la velocidad a la que fluye una cantidad en el tiempo. Leibniz, en cambio, introdujo la notación diferencial

$$\frac{dy}{dx},$$

que ha perdurado hasta hoy. Esta escritura condensaba una idea revolucionaria: que el cambio de una magnitud podía entenderse como el cociente de dos incrementos infinitesimales. Como explica Kline (1990), esta intuición fue mucho más que un avance técnico; representó una nueva forma de pensar la naturaleza como un conjunto de procesos en lugar de entidades estáticas.

En términos sencillos, una razón de cambio promedio mide cómo varía una cantidad con respecto a otra a lo largo de un intervalo. Si un móvil recorre una distancia $\mathbf{s}$ en un tiempo $\mathbf{t}$, su razón de cambio promedio se expresa como

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Este cociente indica el ritmo de variación en un lapso determinado. En física, representa la velocidad media; en economía, el costo medio; en biología, la tasa de crecimiento promedio de una población. Pero la ciencia moderna no se conformó con conocer el promedio del cambio: buscó medirlo en un instante. Surge entonces la razón de cambio instantánea, entendida como el límite del cociente incremental cuando el intervalo tiende a cero:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

El paso del cambio promedio al cambio instantáneo no es solo un proceso algebraico, sino también un salto cognitivo. Según Tall y Vinner (1981), los estudiantes tienden a concebir el cambio como algo observable y discreto, por lo que necesitan reconstruir mentalmente la idea de variación continua. La razón de cambio actúa entonces como un puente entre la percepción empírica y la abstracción formal: permite comprender cómo una pendiente tangible se transforma en una noción infinitesimal. En la enseñanza del cálculo, esta transición constituye una de las experiencias intelectuales más significativas, pues representa el paso de lo visible a lo conceptual.

Ejemplo 7: Consideremos la función $f(x) = x^2$.

Si se calcula la razón de cambio promedio entre $x = 2$ y $x = 3$, se obtiene:

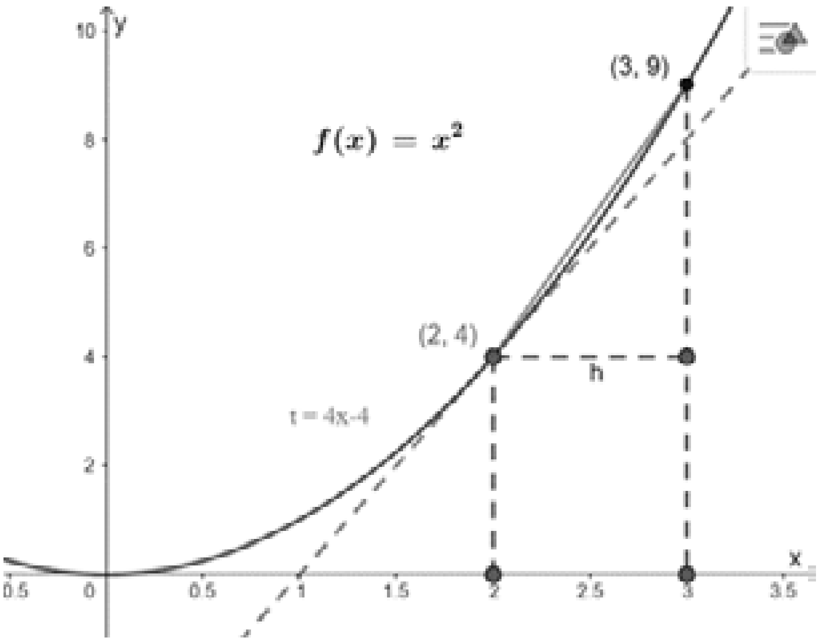
$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5.$$

Este valor indica que, en promedio, la función crece 5 unidades de y por cada unidad que aumenta x en ese intervalo. Sin embargo, si deseamos conocer la razón de cambio en el punto exacto $x = 2$, debemos hacer que el incremento tienda a cero:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = 4$$

Así, la pendiente instantánea en ese punto es 4 (Figura 11). Lo que comienza como una comparación entre dos puntos se convierte, al límite, en una observación del comportamiento local de la función.

Figura 11.
Razón de cambio promedio de $f(x)$ *entre* $x = 2$ y $x = 3$



Nota. Elaboración propia

El significado de la razón de cambio trasciende el ámbito matemático. En biología, la tasa de crecimiento de una población $\mathrm{P(t)}$ se modela mediante la función logística

$$\mathrm{P(t)} = \frac{\mathrm{K}}{1+\mathrm{Ae^{-rt}}},$$

donde $\mathbf{K}$ es la capacidad máxima, $\mathbf{A}$ una constante y $\mathbf{r}$ la tasa de crecimiento. La derivada

$$\mathrm{P'(t)} = \frac{\mathrm{rAe^{-rt}K}}{(1+\mathrm{Ae^{-rt}})^2}.$$

muestra cómo el crecimiento es rápido al inicio, luego se desacelera y finalmente se estabiliza. Murray (2002) señala que esta función describe fielmente procesos biológicos como la difusión de enfermedades o el crecimiento de poblaciones, y que su interpretación depende directamente de la razón de cambio.

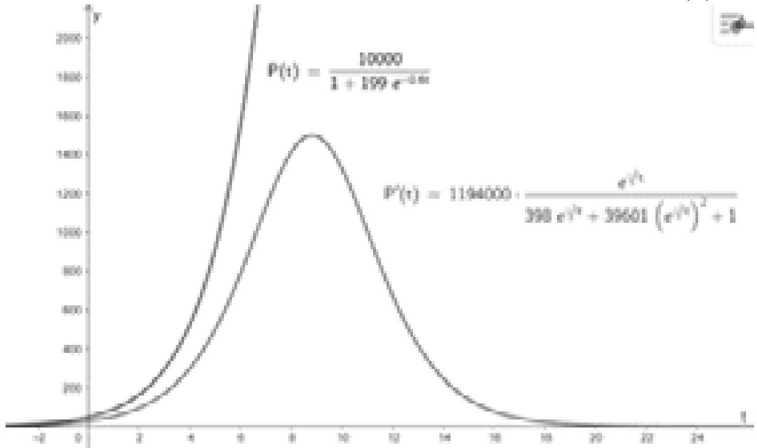
Ejemplo 8: En un laboratorio de microbiología, un grupo de investigadores estudia el crecimiento de una colonia de bacterias en un medio con nutrientes limitados. Al inicio del experimento, se colocan 50 bacterias en una placa de cultivo. Con el paso de los días, las bacterias se reproducen, pero el crecimiento no puede mantenerse de forma indefinida, ya que los recursos del medio comienzan a agotarse.

Los científicos estiman que la población máxima que puede alcanzar el cultivo, antes de que los nutrientes se agoten completamente, es de 10 000 bacterias. Además, determinan que la tasa intrínseca de crecimiento es de 0.6 por día.

A partir de estas condiciones (Figura 12), el crecimiento se modela mediante la función logística

$$\mathrm{P(t)} = \frac{10000}{1+199\mathrm{e}^{-0.6\mathrm{t}}}$$

Figura 12.
Comportamiento del crecimiento de la función logística $P(t)$



Nota. Elaboración propia

En economía, la razón de cambio se conoce como tasa marginal y constituye la base del análisis económico diferencial. Si $\mathrm{C(x)}$ representa el costo total de producir $\mathbf{x}$ unidades, la derivada $\mathrm{C'(x)}$ indica el costo adicional de producir una unidad más: el costo marginal. Esta información es esencial para determinar precios, maximizar beneficios y equilibrar recursos (Chiang & Wainwright, 2005). La economía matemática, como señala Blitzer (2022), es impensable sin el concepto de razón de cambio, pues toda decisión racional implica comparar variaciones.

En la física moderna, las razones de cambio son el lenguaje mismo de las leyes naturales. La velocidad es la razón de cambio de la posición respecto al tiempo, y la aceleración, la razón de cambio de la velocidad. En electromagnetismo, la ley de Faraday establece que la fuerza electromotriz inducida en un circuito es proporcional a la razón de cambio del flujo magnético. Incluso la teoría de la relatividad de Einstein se apoya en derivadas que expresan cómo cambian las magnitudes espacio-temporales con respecto a los sistemas de referencia.

Desde un punto de vista más abstracto, la razón de cambio introduce la idea de dependencia funcional. Como afirma Duval (2017), pensar matemáticamente significa comprender las relaciones entre variables y no solo los valores que adoptan. En este sentido, la razón de cambio enseña a mirar el mundo como un sistema de interacciones: cada fenómeno depende de otro y su comportamiento se expresa en la tasa con que uno afecta al otro.

Esta visión relacional también tiene profundas implicaciones didácticas. Artigue (2009) sostiene que la enseñanza tradicional del cálculo suele centrarse en la aplicación mecánica de reglas de derivación, sin propiciar una comprensión conceptual del cambio. En cambio, un enfoque basado en las razones de cambio invita a los estudiantes a explorar gráficamente el comportamiento de las funciones, a observar cómo la pendiente de la secante se transforma en tangente, y a interpretar el valor de la derivada en términos del fenómeno que representa. Las herramientas digitales como GeoGebra o Desmos ofrecen un entorno idóneo para esta experiencia, al permitir visualizar el cambio de manera dinámica y manipulable.

Hiebert y Carpenter (1992) agregan que el aprendizaje con comprensión requiere conectar las representaciones numéricas, algebraicas y gráficas de un mismo concepto. En este sentido, la razón de cambio actúa como eje articulador, porque une la expresión algebraica

$$\pm\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

con la representación geométrica de la pendiente y con la interpretación verbal de la variación. Cuando el estudiante logra vincular estas formas de representación, el cálculo deja de ser un procedimiento para convertirse en una forma de pensamiento relacional.

A nivel cognitivo, el estudio de las razones de cambio promueve lo que Tall (2013) denomina “pensamiento estructural”: la capacidad de reconocer patrones de variación en contextos distintos. Un estudiante que entiende la razón de cambio en una función polinómica puede transferir ese conocimiento a una función exponencial o trigonométrica, porque ha interiorizado la lógica del cambio más allá de la forma de la ecuación.

Desde el punto de vista histórico, la consolidación de la razón de cambio como herramienta universal de análisis marcó una revolución epistemológica. En el siglo XVIII, matemáticos como Euler y Lagrange formalizaron el cálculo diferencial con un rigor que permitió su expansión a la mecánica, la astronomía y la ingeniería. En el siglo XIX, Cauchy y Weierstrass introdujeron la definición $\varepsilon - \delta$ del límite, asegurando la consistencia lógica de las derivadas. Más tarde, el pensamiento de Leibniz se retomó en la teoría de funciones diferenciables, en la geometría y en la física cuántica. Apostol (1967) subraya que toda esta evolución histórica puede interpretarse como la búsqueda constante de una descripción precisa del cambio.

En la práctica educativa contemporánea, la noción de razón de cambio es también una puerta de entrada a la interdisciplinariedad. Los proyectos de modelización matemática permiten que los estudiantes exploren fenómenos reales desde el cálculo: el crecimiento de una bacteria, el aumento de la temperatura en un cuerpo, la depreciación de un vehículo o el flujo de usuarios en una red social. Cada una de estas situaciones encarna una razón de cambio concreta que puede representarse gráficamente, analizarse algebraicamente y explicarse verbalmente.

Según Godino y Batanero (1998), enseñar cálculo requiere integrar la “dimensión semiótica” y la “dimensión fenomenológica” del conocimiento. La primera se refiere al manejo de símbolos y fórmulas; la segunda, a la comprensión de los fenómenos que esos símbolos describen. La razón de cambio actúa como punto de convergencia entre ambas dimensiones, porque su significado no depende del número obtenido, sino del fenómeno al que se refiere.

Por ello, en la enseñanza de la derivada resulta fundamental insistir en la lectura de gráficos y en la interpretación contextual de los resultados. Un estudiante debe poder decir no solo que $f'(2) = 4$, sino qué implica eso en el problema: que la temperatura aumenta cuatro grados por hora, que la población crece cuatro individuos por unidad de tiempo o que la ganancia se incrementa en cuatro dólares por producto adicional. Esa interpretación semántica del número derivado es lo que distingue la comprensión instrumental de la comprensión conceptual.

La pedagogía del cálculo, por tanto, no debe limitarse a la transmisión de técnicas, sino promover el desarrollo de una sensibilidad matemática para interpretar la variación. Esto implica un enfoque que combine lo conceptual, lo histórico, lo visual y lo aplicado. Como sugiere Artigue (2009), enseñar cálculo es invitar a los estudiantes a construir modelos del mundo, a reconocer regularidades y a traducirlas en relaciones cuantitativas.

En síntesis, las razones de cambio constituyen el núcleo del pensamiento diferencial. Representan la capacidad humana de mirar el mundo no como una colección de objetos, sino como una red de procesos en transformación. Comprender una razón de cambio es comprender una ley de comportamiento; derivar una función es leer la historia de su movimiento. En el aula, enseñar este concepto es enseñar a pensar en términos de relación, dependencia y continuidad. Cuando el estudiante logra asociar una pendiente con una tendencia, un valor con una variación y una fórmula con un fenómeno, ha alcanzado el sentido profundo del cálculo: la lectura matemática del cambio.

Aplicaciones de la derivada: crecimiento, decrecimiento y optimización

El cálculo diferencial constituye una de las creaciones intelectuales más influyentes en la historia del pensamiento humano. Su aparición transformó profundamente la forma de concebir el movimiento, la variación y el cambio, ofreciendo una herramienta teórica para comprender fenómenos que, hasta entonces, parecían inabordables por la matemática clásica. En el centro de esta revolución se encuentra la derivada, cuya potencia conceptual radica en medir el cambio instantáneo, en expresar con rigor matemático cómo una magnitud se modifica con respecto a otra (Stewart, 2021).

Las aplicaciones de la derivada en el análisis de funciones no solo permiten determinar dónde una variable aumenta o disminuye, sino también comprender los puntos en los que se alcanza un equilibrio o una optimización. Dicho de otro modo, el cálculo traduce la idea de cambio en un lenguaje formal que puede ser analizado, representado y predicho. Apostol (1967) señala que "la derivada no es únicamente una herramienta computacional, sino un modo de interpretar la realidad mediante relaciones de dependencia y continuidad" (p. 145).

En el ámbito educativo, esta capacidad interpretativa tiene un valor pedagógico incalculable. Enseñar las aplicaciones de la derivada es enseñar a pensar el cambio desde distintas perspectivas: la geométrica, la simbólica, la numérica y la verbal. Según Duval (2017), el pensamiento matemático se construye precisamente a través de la coordinación entre estos registros de representación, que permiten al estudiante conectar lo abstracto con lo visual y lo simbólico con lo fenomenológico. En consecuencia, el estudio de las aplicaciones de la derivada se convierte en un espacio privilegiado para articular teoría, visualización y práctica contextualizada.

Crecimiento y decrecimiento: la lectura del cambio

Analizar el crecimiento y decrecimiento de una función es comprender su dinámica interna. Una función f se dice creciente en un intervalo III cuando, al aumentar x, los valores de $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ también aumentan; de manera análoga, es decreciente cuando $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ disminuye a medida que x crece. Desde el punto de vista analítico, el signo de la derivada determina este comportamiento:

- Si $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) > 0$, la función crece.
- Si $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) < 0$, la función decrece.

Este criterio constituye la base del estudio cualitativo de las funciones. A diferencia del enfoque puramente algebraico, el análisis de crecimiento no busca calcular valores numéricos, sino describir tendencias: hacia dónde se dirige la función, cuándo se detiene, cuándo cambia su ritmo o su dirección. Stewart (2021) explica que el cálculo se distingue precisamente por su capacidad para pasar del valor puntual al comportamiento global, integrando la información local que aporta la derivada.

Ejemplo 9: la función cúbica

$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}$. Su derivada $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}^2 - 3$,

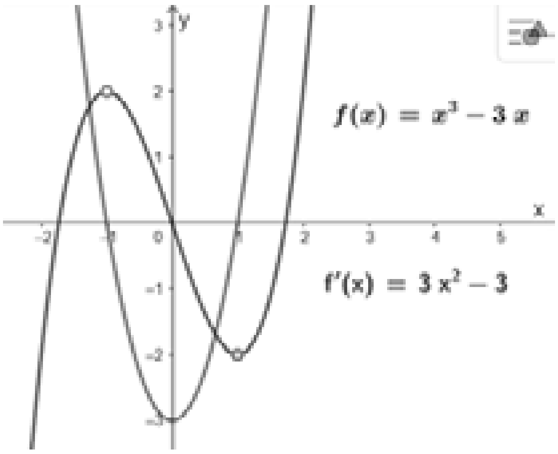
se anula en $\mathrm{x} = \pm 1$ (Figura 13). Evaluando los signos, se concluye que:

- Si $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) > 0$, para $\mathrm{x} < -1$ y $\mathrm{x} > 1$, la función crece
- Si $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) < 0$, la función decrece.

Esta descripción simbólica se traduce visualmente en una gráfica con dos cambios de pendiente, donde la tangente pasa de ascendente a descendente.

Figura 13.

Cambio de pendiente de la función $f(x)$



Nota. Elaboración propia

Lo esencial no es el cálculo en sí, sino la interpretación del signo como expresión del comportamiento. Duval (2017) insiste en que esta interpretación visual favorece la comprensión conceptual, pues permite que el estudiante “vea” la variación antes de formalizarla algebraicamente.

Desde el punto de vista histórico, el estudio del crecimiento y decrecimiento refleja la preocupación de los matemáticos por describir la naturaleza. Para Newton, cada cambio observable tenía su correspondencia en una tasa de variación, mientras que Leibniz concebía la derivada como la relación entre diferenciales infinitesimales. En ambos casos, el pensamiento sobre el cambio se articuló como una búsqueda de regularidad en lo dinámico (Apostol, 1967).

Apoyo didáctico: en la enseñanza actual, los entornos digitales como GeoGebra permiten hacer visible esta idea. Cuando el estudiante manipula el punto que se mueve sobre la gráfica, observa cómo el valor de la derivada representado como la pendiente de la tangente, varía continuamente. Esta experiencia perceptiva refuerza el vínculo entre el concepto algebraico y su representación geométrica, lo que Tall (2013) denomina el paso del mundo visual-sensorial a mundo simbólico.

La interpretación de crecimiento y decrecimiento también ofrece oportunidades para la argumentación. El docente puede plantear preguntas del tipo: ¿Qué ocurre con la pendiente cuando la función alcanza su punto más alto?, o ¿por qué el signo de la derivada determina la dirección del cambio. Este tipo de razonamiento heurístico fomenta la reflexión y la metacognición, promoviendo una comprensión profunda del concepto de variación.

Extremos: equilibrio y estabilidad

Los extremos de una función representan estados de equilibrio. Son los puntos donde la función “se detiene” momentáneamente, antes de cambiar su tendencia. Matemáticamente, un punto x_0 es un extremo local si la derivada se anula o no existe, y la función cambia de creciente a decreciente o viceversa.

El criterio de la primera derivada establece que:

- Si $f'(x)$ pasa de positiva a negativa en x_0 entonces $f(x_0)$ tiene un máximo local
- Si $f'(x)$ pasa de negativa a positiva, es un mínimo local.

El criterio de la segunda derivada, por su parte, analiza la concavidad: si $f'(x_0) > 0$, el punto es un mínimo (curvatura hacia arriba); si $f'(x_0) < 0$, un máximo (curvatura hacia abajo) (Larson & Edwards, 2022).

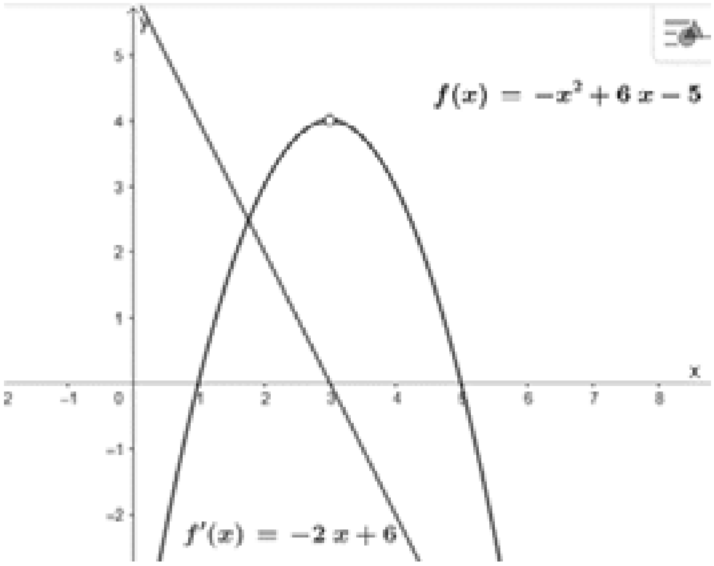
Estos criterios pueden interpretarse intuitivamente mediante la geometría. Una función con curvatura positiva se asemeja a un “valle” (la tangente está por encima de la curva), mientras que una con curvatura negativa se parece a una “colina”. De este modo, la derivada segunda actúa como una “mirada de segundo orden” sobre el cambio: no mide cuánto crece o decrece la función, sino cómo cambia el cambio.

Ejemplo 10: Sea $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ (figura 14).Aquí

$$f'(x) = -2x + 6$$

se anula en $x = 3$, y $f''(x) = -2$ indica concavidad hacia abajo, por tanto (3,4) es un máximo global.

Figura 14.
Representación de concavidad hacia abajo de $f(x)$



Nota. Elaboración propia

Este tipo de razonamiento resulta fundamental para comprender la noción de estabilidad. En física, un cuerpo se encuentra en equilibrio cuando la fuerza neta es cero, lo que corresponde a un punto donde la derivada (la fuerza) se anula. Si además la segunda derivada es positiva, el equilibrio es estable (mínimo de energía); si es negativa, inestable (máximo de energía).

Apoyo didáctico: analizar los extremos mediante simulaciones dinámicas favorece la comprensión visual de la estabilidad. Tall (2013) propone que el aprendizaje matemático se consolida cuando el estudiante logra moverse entre representaciones sin perder el sentido de la relación. Ver cómo la tangente “se aplana” en los extremos antes de cambiar de signo ayuda a comprender la relación entre la pendiente y el comportamiento global.

A nivel pedagógico, estos conceptos también pueden abordarse a través de problemas contextualizados. Por ejemplo, determinar el punto en que una empresa alcanza su máxima producción sin incrementar el costo, o hallar la temperatura ideal para maximizar la eficiencia energética. Estas situaciones invitan al razonamiento interdisciplinar, integrando la matemática con la física, la economía o la biología.

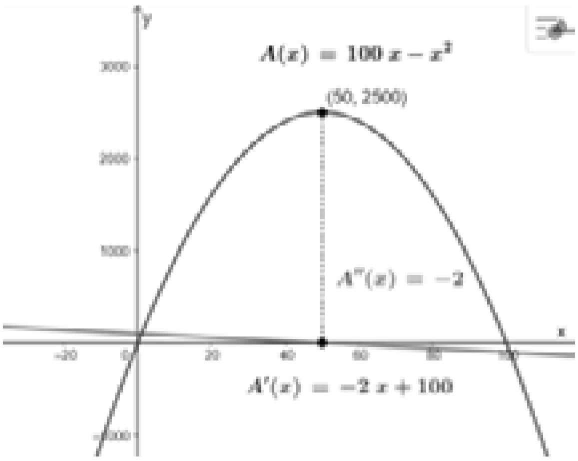
Optimización: el cálculo al servicio de la decisión

El estudio de la optimización constituye la culminación natural del análisis de la derivada. Optimizar implica encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad que depende de una o más variables, bajo ciertas condiciones o restricciones. Este tipo de problemas surge de la vida real y encuentra en el cálculo un lenguaje formal para su resolución.

Stewart (2021) subraya que la optimización no solo es una técnica, sino una forma de pensamiento: busca el equilibrio entre recursos y resultados. En ingeniería, se utiliza para diseñar estructuras que resistan con el mínimo material; en economía, para maximizar utilidades; en biología, para modelar procesos de supervivencia eficiente.

Ejemplo 11: Se desea cercar completamente un terreno rectangular utilizando 200 metros de malla (figura 15). ¿Qué dimensiones maximizan el área del terreno?

Figura 15.
Representación de la función a maximizar A(x)



Nota. Elaboración propia

Sea $\mathbf{x}$ el ancho y "$\mathbf{y}$" el largo del rectángulo (ambos positivos).

La restricción de perímetro es $2x + 2y = 200$ despejando se obtiene $y = 100 - x$. El área a maximizar es $A(x, y) = xy$.

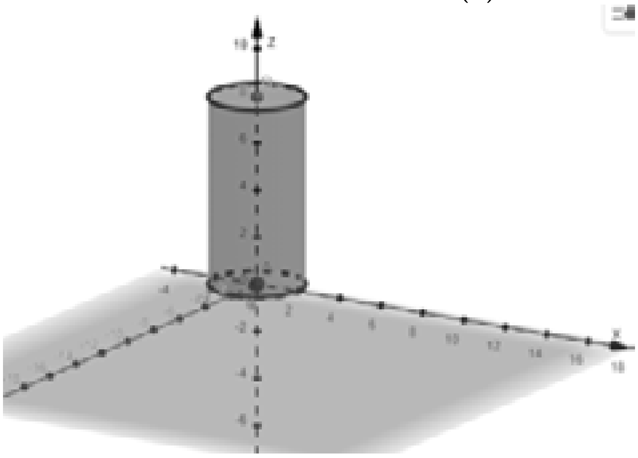
Con la restricción:

$$A(x) = 100x - x^2, 0 < x < 100.$$

Ejemplo 12: Una empresa desea fabricar un envase cilíndrico de volumen fijo $V = 500cm^3$ (figura 16) y necesita minimizar el material utilizado. Si el radio es r y la altura h, el volumen es $V = \pi r^2 h$, y el área total (material) es $A = 2\pi r^2 + 2\pi r$.

Sustituyendo $h = \frac{V}{\pi r^2}$ obtenemos $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}, r > 0$.

Figura 16.
Representación de la función a maximizar $A(r)$



Nota. Elaboración propia

Derivando,

$A'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$. Igualando a cero, $4\pi r^3 = 1000$,
lo que da $r = \left(\frac{250}{\pi}\right)^{1/3}$.

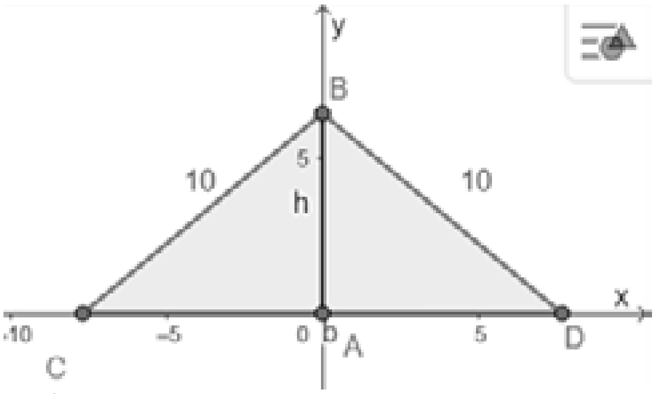
Este resultado indica que la forma óptima es aquella donde la altura y el diámetro son iguales, un principio recurrente en el diseño de envases. Verificación de mínimo (segunda derivada) Al calcular h se tiene:

$h = \frac{500}{\pi r^2}$, a partir de aquí se obtiene $A''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3}$.

Para $r > 0 \Rightarrow A''(r) > 0$. De $4\pi r^3 = 1000 = 2 \cdot 500$ se obtiene $h = 2r$. El cilindro de menor área para volumen fijo cumple altura = diámetro.

Ejemplo 13: Una empresa constructora diseña un pórtico triangular con base fija y lados iguales de 10 metros (Figura 17). El vértice superior puede desplazarse a lo largo de una línea vertical, de manera que la altura h cambia y con ella el área del triángulo.

Figura 17.
Representación de la función a maximizar



Nota. Elaboración propia

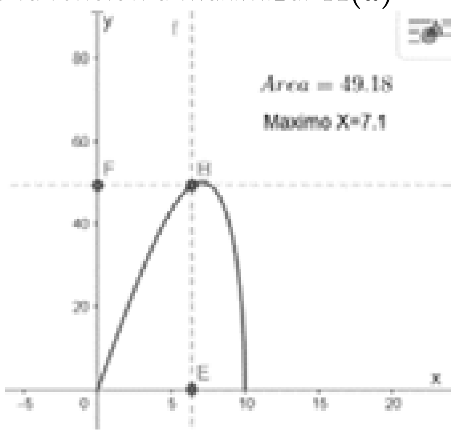
Sea $\mathbf{A}$ el punto medio de la base CD, y $\mathbf{B}$ el vértice superior del triángulo.

La base mide a, por lo que cada mitad de la base tiene longitud

$$\mathrm{A(h)} = \mathrm{h}\sqrt{100 - \mathrm{h}^2}\ ,$$

de donde al derivar e igual a cero obtenemos $\mathrm{h} = 5\sqrt{2\mathrm{h}}$. De aquíuí el área máxima es 50. (Figura 18)

Figura 18.
Representación de la función a maximizar $A(a)$



Nota. Elaboración propia

Apoyo didáctico: este tipo de problemas ofrece una oportunidad significativa para conectar la teoría del cálculo con aplicaciones tangibles, permitiendo que el estudiante comprenda la derivada no solo como una operación algebraica, sino como un instrumento para razonar sobre la optimización y la toma de decisiones. Tal como plantean Duval (2017) y Tall (2013), la comprensión profunda del concepto se fortalece cuando el aprendizaje integra lo simbólico, lo gráfico y lo conceptual, promoviendo un pensamiento matemático que interpreta y transforma la realidad desde una perspectiva de cambio continuo.

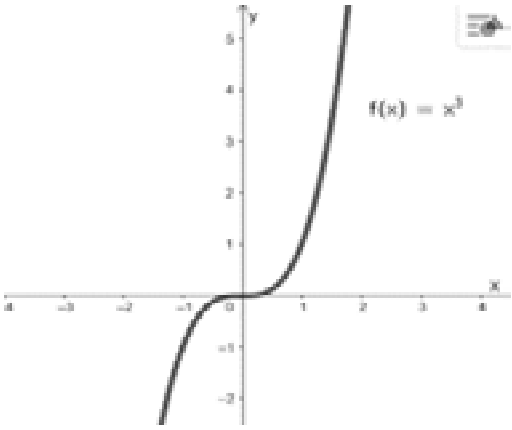
Visualización y análisis gráfico mediante herramientas tecnológicas

En el aprendizaje del cálculo, la visualización es una forma de pensamiento que permite transformar la abstracción en experiencia perceptible. Los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral dejan de ser formulaciones algebraicas cuando el estudiante los ve en acción, representados en un entorno digital que hace tangible la idea de cambio. La tecnología, en este contexto, no sustituye la comprensión conceptual, sino que la media y potencia (Artigue, 2009). La representación gráfica interactiva, el análisis de curvas y la experimentación con parámetros se convierten en estrategias fundamentales para que los estudiantes transiten del pensamiento estático al pensamiento dinámico característico del cálculo.

Visualización del cambio en funciones algebraicas y trascendentes

Uno de los aportes más significativos de la tecnología es la posibilidad de comparar funciones algebraicas y trascendentes desde su comportamiento gráfico. Las funciones polinomiales, por ejemplo, permiten observar la relación entre el grado del polinomio y la forma de su gráfica. En una función cúbica como f(x)=x^3 , herramientas como GeoGebra o Desmos permiten mover puntos críticos, analizar concavidades y mostrar cómo la derivada indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento (Figura 19). Este tipo de análisis favorece la comprensión de la derivada como una función asociada al cambio, no solo como un número calculado en un punto (Stewart, 2021).

Figura 19.
Crecimiento acelerado de $f(x)$



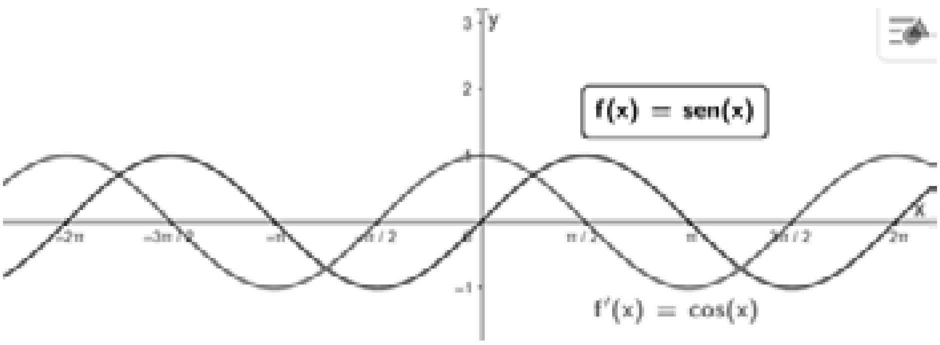
Nota. Elaboración propia

En contraste, las funciones muestran patrones de variación más complejos. Por ejemplo, la función exponencial $\mathrm{f(x) = e^x}$ se visualiza como un crecimiento acelerado cuya pendiente coincide con el propio valor de la función.

La gráfica de su derivada, al superponerse, revela una propiedad esencial: la derivada de $\mathbf{e^x}$ es la misma función, lo que convierte a esta curva en un modelo paradigmático del cambio proporcional. Las funciones logarítmicas, en cambio, crecen cada vez más lentamente, representando procesos de crecimiento desacelerado como la difusión de información o la disminución de intensidad de una señal (Larson & Edwards, 2022).

Las funciones trigonométricas ofrecen otro nivel de análisis visual. Al graficarlas junto a sus derivadas, el estudiante puede observar la relación armónica entre sus cambios: cuando el seno alcanza su máximo, la derivada (coseno) se anula, y viceversa (Figura 20). Este patrón cíclico muestra cómo la variación se equilibra en un sistema periódico, lo que permite comprender los fenómenos oscilatorios presentes en la física y la ingeniería.

Figura 20.
Relación armónica entre $f(x)$ *y* $f'(x)$



Nota. Elaboración propia

Biza et al. (2018) destacan que este tipo de visualizaciones contribuye a consolidar la unidad cognitiva entre el concepto y su representación: el estudiante asocia la pendiente, la curvatura y el ritmo de cambio con la forma de la función.

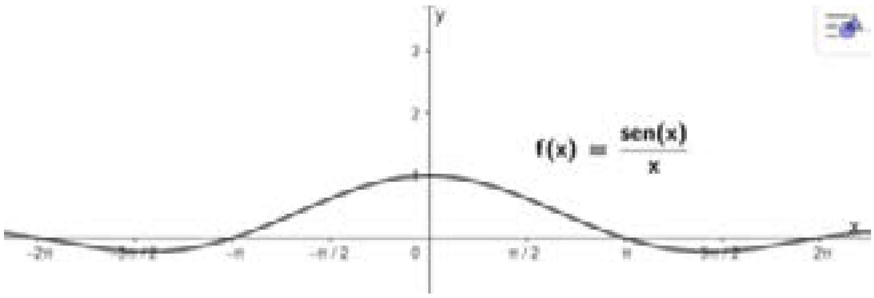
Exploración visual del límite y la continuidad
Las herramientas digitales permiten representar la aproximación de valores de manera dinámica, facilitando la comprensión del límite. Cuando el estudiante observa, por ejemplo, cómo

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

se aproxima a $\mathbf{1a}$ medida que $\mathbf{x}$ tiende a 0 (Figura 21), se genera una experiencia visual que refuerza la noción de continuidad.

GeoGebra permite incluso animar el movimiento de puntos sobre la curva, mostrando cómo los valores de la función se acercan progresivamente a un mismo valor sin alcanzarlo.

Figura 21.
Representación con Geogebra de la continuidad de $f(x)$



Nota. Elaboración propia

Esta capacidad de manipular y observar la función promueve lo que Tall (1993) denomina imagen conceptual: una representación mental donde el estudiante integra la observación con la comprensión simbólica. De este modo, el límite deja de percibirse como una simple sustitución algebraica para asumirse como un proceso de tendencia, de acercamiento controlado.

Artigue (2009) sugiere que el aprendizaje del límite debe articular tres dimensiones: la simbólica (manipulación de expresiones), la gráfica (representación visual) y la numérica (aproximación progresiva), y las herramientas tecnológicas son el espacio ideal para integrar las tres en una sola experiencia.

Derivadas como pendientes y tasas de cambio en contextos reales
La comprensión de las derivadas como pendientes y tasas de cambio adquiere un sentido más profundo cuando se conecta con situaciones que los estudiantes reconocen en su vida cotidiana. Al

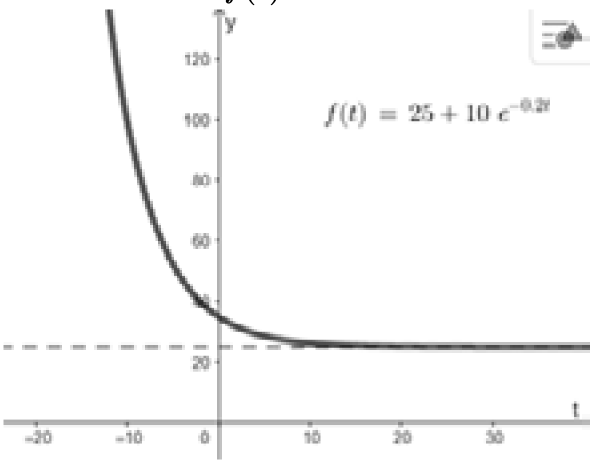
analizar cómo varía la altura de un objeto en movimiento, cómo se modifica la temperatura a lo largo del día o cómo crece el caudal de un río tras una lluvia intensa, la derivada deja de percibirse como un procedimiento abstracto y se convierte en una herramienta para interpretar la dinámica del mundo. Este enfoque no solo favorece una lectura más intuitiva de los gráficos, sino que también ayuda a que los estudiantes desarrollen la capacidad de anticipar comportamientos, identificar tendencias y tomar decisiones con base en información cambiante, lo que fortalece la utilidad práctica del cálculo en contextos reales.

Ejemplo 14: al estudiar una función de temperatura

$$f(t) = 25 + 10e^{-0.2t}$$

(Figura 22), el estudiante puede observar cómo el calor disminuye gradualmente en el tiempo, y cómo su derivada negativa refleja la velocidad de enfriamiento.

Figura 22.
Representación de la función $f(t)$



Nota. Elaboración propia

En contextos económicos, funciones del tipo

$$C(x) = 1000 + 50x - 0.1x^2$$

permiten visualizar costos marginales y maximización de beneficios mediante el análisis de pendientes.

Estas simulaciones, cuando se presentan en plataformas como GeoGebra o Wolfram Alpha, fomentan el razonamiento interpretativo: los estudiantes no solo calculan, sino que explican cómo el signo de la derivada afecta la tendencia y cómo los puntos críticos representan equilibrios o extremos.

Este enfoque integrador, recomendado por Stewart (2021), impulsa una comprensión funcional del cálculo aplicada a los fenómenos de la vida cotidiana.

El avance de las herramientas tecnológicas también permite explorar funciones más complejas, como las hiperbólicas y logísticas, que tradicionalmente se reservaban para niveles avanzados. Las funciones hiperbólicas, tales como senh(x) y cosh(x), pueden visualizarse como equivalentes suavizados de las funciones trigonométricas, pero sin periodicidad. Su análisis ayuda a comprender fenómenos de crecimiento equilibrado y geometría no euclidiana.

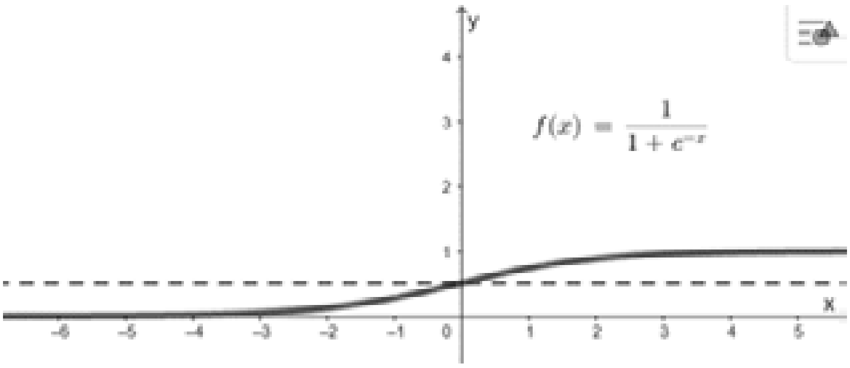
Ejemplo 15: las funciones logísticas, como

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}$$

(Figura 23), representan procesos de crecimiento limitado, donde la pendiente inicial es máxima y luego se estabiliza. En biología, economía y tecnología, esta curva describe el comportamiento de poblaciones, adopción de innovaciones o difusión de información (Larson & Edwards, 2022).

La enseñanza del cálculo con recursos tecnológicos implica reconocer que el conocimiento matemático es multirrepresentacional. Duval (1999) sostiene que el aprendizaje significativo requiere la coordinación entre distintos registros semióticos: el algebraico, el gráfico, el tabular y el verbal. Las herramientas digitales permiten articular estos registros, de modo que el estudiante no solo vea la función, sino que la interprete y la verbalice.

Figura 23.
Representación de la función logística $f(x)$



Nota. Elaboración propia

En este sentido, la visualización no es una actividad pasiva, sino una forma activa de pensar y construir significados. La interacción entre el gesto (arrastrar un punto), la observación (ver cómo cambia la pendiente) y la explicación verbal (interpretar la relación entre variables) convierte la experiencia en un proceso cognitivo integral. De esta manera, la tecnología se transforma en un espacio de mediación semiótica, donde los conceptos matemáticos adquieren sentido a través de la acción y la interpretación (Artigue, 2009).

Conclusiones

El estudio de la derivada permitió comprender que el cálculo diferencial no es solo una herramienta para resolver problemas, sino un modo de pensar la realidad desde el cambio, la variación y la continuidad. A lo largo del capítulo se mostró que la derivada, concebida como límite del cociente incremental, constituye la base para medir el ritmo y la dirección de transformación de cualquier fenómeno. Su interpretación geométrica como pendiente de la tangente, su aplicación en el análisis del crecimiento y la optimización, y su uso en contextos físicos, biológicos o económicos revelan su carácter interdisciplinar y formativo.

Tal como sostienen Stewart (2021), derivar una función equivale a leer la dinámica interna de un proceso, descifrando las leyes que gobiernan su comportamiento. En este sentido, la derivada actúa como un lenguaje universal que traduce los movimientos de la naturaleza, las regularidades del pensamiento y los equilibrios del mundo social en relaciones cuantificables.

Desde una perspectiva pedagógica, este capítulo enfatiza que enseñar la derivada requiere más que dominio técnico: implica desarrollar en los estudiantes una comprensión conceptual y visual del cambio. Artigue (2009) y Tall (2013) coinciden en que la construcción de este conocimiento demanda una articulación entre lo simbólico, lo gráfico y lo fenomenológico. El uso de herramientas digitales como GeoGebra, junto con estrategias de modelización contextual, permite que el aprendizaje del cálculo sea significativo, crítico y creativo. Comprender la derivada es, en última instancia, comprender la relación entre lo estático y lo dinámico, entre lo finito y lo infinitesimal. Así, el capítulo concluye afirmando que el cálculo diferencial, al analizar la variación, forma una manera de pensar que trasciende la matemática: una mirada interpretativa del mundo basada en la razón, la visualización y la comprensión del cambio continuo.

Referencias

Apostol, T. M. (1967). Calculus. Vol. 1: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra. Wiley.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. En C. Winsløw (Ed.), Nordic research in mathematics education. Proceedings from NORMA08 (pp. 7-16). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087907839_003

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2018). Using the tangent line as a local linear approximation: A case of cognitive unity. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(2), 217–235.

Blitzer, R. (2022). Precalculus: Concepts through functions, a right triangle approach to trigonometry (8th ed.). Pearson.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. (2011). A history of mathematics (3rd ed.). Wiley.

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2005). Fundamental methods of mathematical economics (4th ed.). McGraw-Hill.

Duval, R. (1999). Representation, vision, and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning Research in Mathematics Education, 1(1), 3–26.

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations. Springer.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Didáctica de las matemáticas para la enseñanza secundaria. Síntesis.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65–97). Macmillan.

Kline, M. (1990). Mathematical thought from ancient to modern times (Vol. 1). Oxford University Press.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2022). Cálculo: Trascendentes tempranas (10.ª ed.). Cengage Learning.

Murray, J. D. (2002). Mathematical biology I: An introduction (3rd ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/b98868

Stewart, J. (2021). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (9.ª ed.). Cengage Learning.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 495–511). Macmillan.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in learning calculus. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 31–59). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_3

Tall, D. (2013). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2024). Thomas' calculus: Early transcendentals (15th ed.). Pearson.

Capítulo III

Integral: acumulación, área y reconstrucción del cambio

Introducción

La noción de integral representa uno de los momentos más significativos en la historia del pensamiento matemático, pues surge como respuesta al deseo de medir lo continuo, de comprender cómo los pequeños fragmentos de la realidad pueden unirse para formar un todo. Si en el estudio de la derivada aprendimos a analizar el cambio en un punto, la integral nos invita a recorrer el camino inverso: reconstruir el cambio a partir de sus variaciones elementales. En este sentido, el cálculo integral constituye el complemento natural del cálculo diferencial y expresa, con un lenguaje preciso, la idea de acumulación.

Desde los métodos intuitivos de Arquímedes hasta la formulación rigurosa del Cálculo por Newton y Leibniz, la integral ha estado ligada al problema de encontrar áreas, volúmenes y longitudes. Sin embargo, su significado trasciende la geometría: en física describe desplazamientos y energías acumuladas; en biología, el crecimiento poblacional; y en economía, la productividad o el costo total. La integral permite, así, representar procesos donde una magnitud varía de forma continua, otorgando a las matemáticas un poder de síntesis excepcional entre lo infinitesimal y lo global.

Este capítulo explora la integral como suma infinita, el concepto de antiderivada, las propiedades y significado de la integral definida, y el Teorema Fundamental del Cálculo, que une elegantemente los dos grandes mundos del análisis: derivar y reintegrar. Finalmente, se presentan los métodos clásicos de integración y sus aplicaciones prácticas en la física, la geometría y la economía, con el propósito de que el lector no solo resuelva integrales, sino que las interprete como un puente entre la razón matemática y la comprensión profunda del cambio en el mundo real.

La integral como suma infinita y aproximación de áreas

Comprender la integral exige reconocer que las matemáticas no solo cuantifican la realidad, sino que la reconstruyen mediante un lenguaje de precisión. La integral representa ese esfuerzo humano por volver a unir lo que el análisis infinitesimal había fragmentado: el cambio. En esencia, integrar es sumar lo infinitamente pequeño para comprender lo grande, un gesto intelectual que combina intuición, razonamiento y abstracción. Stewart (2021) explica que el concepto de integral no surge como una operación aislada, sino como una consecuencia natural del estudio de las funciones variables y de la necesidad de medir la acumulación de sus efectos a lo largo de un intervalo. Si la derivada nos permite observar el instante del cambio, la integral nos invita a contemplar la totalidad del proceso, devolviendo continuidad y sentido al movimiento.

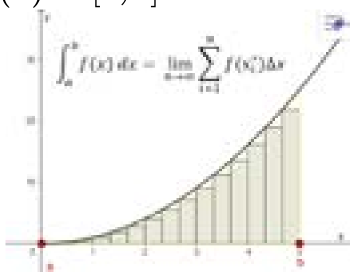
Desde una mirada histórica, la idea de integrar antecede con mucho al formalismo del cálculo. Los babilonios y egipcios ya buscaban métodos para calcular áreas y volúmenes aproximados, aunque sin noción de límite ni infinitésimo. Más tarde, Arquímedes desarrolló su célebre método de exhausción, considerado el precursor directo del cálculo integral. Según Boyer y Merzbach (2011), Arquímedes demostró que el área de un círculo podía determinarse como el límite de áreas de polígonos inscritos, anticipando la lógica moderna de aproximaciones sucesivas. Su intuición consistía en reducir los errores geométricos mediante una partición cada vez más fina, un proceso que siglos después sería descrito con el rigor analítico de Riemann.

Durante el Renacimiento, con el auge de la ciencia experimental, resurgió el interés por medir magnitudes que varían continuamente. Cavalieri, discípulo de Galileo, propuso su principio de los indivisibles, según el cual una figura geométrica se compone de infinitas líneas o elementos de igual naturaleza. Aunque su propuesta carecía de formalidad matemática, fue el primer intento moderno de concebir el área como una suma infinita de elementos infinitesimales (Kline, 1990).

El desarrollo del cálculo diferencial e integral en los siglos XVII y XVIII, con Newton y Leibniz como protagonistas, supuso un giro radical. Leibniz introdujo el símbolo ∫, inspirado en la letra "S" de summa, para denotar una suma continua de diferenciales infinitesimales f(x)dx. Newton, por su parte, concibió la integración como un proceso de reconstrucción del movimiento a partir de sus velocidades instantáneas, denominando fluentes a las magnitudes variables. Ambos coincidieron en que derivar e integrar eran operaciones inversas, una relación que más tarde quedaría consagrada en el Teorema Fundamental del Cálculo. Como destaca Apostol (1967), esta conexión entre cambio y acumulación constituye el eje central del análisis matemático moderno.

Geométricamente, la integral definida se interpreta como el límite de una suma de Riemann (Figura 1), que aproxima el área bajo una curva a través de rectángulos de base cada vez más pequeña.

Figura 1.
Integral definida de $f(x)$ *en* $[a;b]$



Nota: Elaboración propia.

Sea una función continua $f(x)$ definida en el intervalo [a,b]; si se divide dicho intervalo en n subintervalos de ancho Δx, el área aproximada se expresa como $A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, y la integral definida se obtiene como el límite cuando $n \to \infty$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Esta formulación, propuesta por Bernhard Riemann en el siglo XIX, formaliza la noción de acumulación continua. Tal como observa Thomas et al. (2024), cada rectángulo representa una pequeña contribución al total, y la integral surge cuando el número de rectángulos se vuelve infinito y su anchura tiende a cero. La perfección de esta idea reside en que un número infinito de elementos infinitesimales puede producir un valor finito, revelando la armonía entre lo discreto y lo continuo.

Apoyo didáctico: Enseñar la integral como suma infinita implica superar la tendencia mecanicista que reduce el cálculo a una serie de algoritmos. Según Duval (2017), comprender la integral requiere transitar entre distintos registros de representación, ya que solo así se construye una visión unitaria del concepto. En esta línea, Artigue (2009) enfatiza la importancia de los procesos de visualización: ver cómo los rectángulos bajo la curva se multiplican hasta llenar el área promueve una comprensión fenomenológica del límite. El aprendizaje, entonces, no se limita a manipular símbolos, sino a experimentar la transición desde la aproximación hacia la completitud.

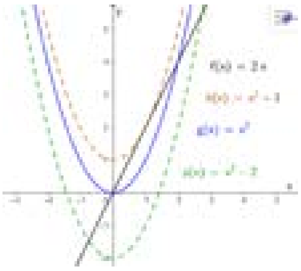
La integral, sin embargo, no se agota en su interpretación geométrica. Representa también un modelo cognitivo para pensar procesos de acumulación temporal o espacial. En física, expresa desplazamientos y energías; en biología, el crecimiento de una población; en economía, la producción total o el costo acumulado. Cada caso responde al mismo principio: la integración cuantifica el efecto total de una magnitud que varía. Como afirma Freudenthal (1991), la potencia educativa del cálculo integral reside en su capacidad para conectar los fenómenos naturales con el pensamiento matemático, permitiendo al estudiante reconocer que las leyes del cambio y la acumulación son universales.

Por último, desde la perspectiva del pensamiento matemático avanzado, la integral representa una forma de reconciliar dos modos de razonamiento: el local, propio de la derivada, y el global, característico de la acumulación. Tall (2013) señala que esta dualidad requiere desarrollar lo que denomina *flexibilidad cognitiva*, es decir, la habilidad para moverse entre la visión instantánea y la visión total del fenómeno. Esta competencia constituye uno de los pilares de la comprensión profunda del cálculo y, por extensión, del pensamiento científico contemporáneo.

Integral indefinida y el concepto de antiderivada

El nacimiento del concepto de integral indefinida está profundamente ligado a la historia del pensamiento sobre el cambio. Desde los primeros intentos por medir magnitudes variables hasta la formalización del cálculo, la humanidad ha buscado entender cómo una cantidad puede reconstruirse a partir de su variación. La idea de antiderivada (Figura 2) surge precisamente de esa necesidad: recuperar la función original conociendo su ritmo de cambio.

Figura 2.
Antiderivadas de la función de $f(x)$



Nota: Elaboración propia.

Orígenes históricos del concepto

Apostol (1967) explica que esta relación inversa fue la clave para unificar la teoría del cambio. A partir de entonces, las matemáticas dejaron de ser solo una ciencia del equilibrio estático para convertirse en un lenguaje del movimiento y la transformación. Newton afirmaba que "el método de las fluxiones sirve tanto para encontrar velocidades a partir de distancias, como distancias a partir de velocidades", sintetizando la esencia de la integral indefinida.

La historia posterior, con aportes de Cauchy, Riemann y otros, consolidó el rigor analítico del cálculo. Sin embargo, el concepto intuitivo de recomponer una función a partir de su derivada permaneció como una de las ideas más poderosas y formativas de toda la matemática.

Fundamentación formal y significado de la antiderivada

Desde un punto de vista formal, se dice que una función $\mathbf{F(x)}$ es una antiderivada de $\mathbf{f(x)}$ si cumple que $\mathbf{F'(x) = f(x)}$. En este caso, se define la integral indefinida como el conjunto de todas las antiderivadas de $\mathbf{f(x) : \int f(x)dx = F(x) + C}$, donde C es una constante de integración. Esta constante representa el hecho de que existen infinitas funciones que, al derivarse, producen la misma función $\mathbf{f(x)}$. Thomas et al. (2024) señalan que esta característica encierra una noción de indeterminación creativa: al integrar, no se obtiene una única solución, sino una familia de funciones que comparten la misma estructura de cambio.

Geométricamente, la constante C corresponde a un desplazamiento vertical.

Ejemplo 1: Si graficamos las antiderivadas de una función, como $\mathbf{F(x) = x^2 + C}$ para $\mathbf{F(x) = 2x}$, obtenemos una familia de parábolas con igual forma pero distintas alturas. Cada una representa una versión posible del mismo fenómeno, determinada por una condición inicial. En física, esa condición inicial puede ser la posición de un cuerpo al tiempo $\mathbf{t = 0}$; en economía, el capital inicial; en biología, la población de partida.

Stewart (2021) explica que este concepto de familia funcional permite comprender la integral indefinida como una herramienta de reconstrucción. Integrar no es solo calcular una expresión simbólica, sino restituir el comportamiento general de una magnitud a partir de su ritmo de variación.

Interpretaciones geométrica y física

La interpretación geométrica de la integral indefinida proviene de la relación entre la pendiente y el área. La derivada de una función mide la inclinación de su gráfica en cada punto, mientras que la integral indefinida busca la función cuya pendiente coincide con la dada. Así, integrar equivale a reconstruir la curva original a partir de su campo de pendientes.

Si consideramos $f(x) = \cos(x)$, su antiderivada es $F(x) = \text{sen}(x) + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[\text{sen}(x)\right] = \cos(x)$. En la gráfica, esto significa que la función seno es la curva cuya pendiente en cada punto está determinada por la función coseno. Este ejemplo, aparentemente simple, encierra un principio universal: la antiderivada reconstituye la forma subyacente de un fenómeno a partir de su variación local.

En física, la integral indefinida se convierte en un modelo de la acumulación dinámica. Si conocemos la función de velocidad $v(t)$, su integral indefinida nos da la posición $s(t)$, salvo por una constante que indica la posición inicial. De modo similar, integrar una función de aceleración produce una familia de velocidades, y una función de densidad genera una magnitud total.

En contextos más abstractos, la integral indefinida puede interpretarse como un proceso de memoria funcional: cada antiderivada guarda el registro acumulado del cambio. Apostol (1967) describe esta relación como una “reversión del límite”, donde la integración reconstruye lo que la derivación había descompuesto.

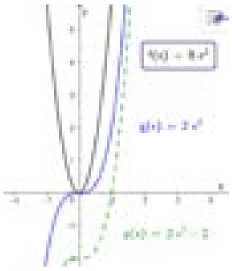
Ejemplo 2: Si $f(x) = 6x^2$, su integral indefinida es:

$\int 6x^2 dx = 2x^3 + C$·

Geométricamente (Figura 3), esta expresión indica que todas las funciones $F(x) = 2x^3 + C$comparten la misma tasa de variación cúbica.

Cada parámetro C representa un desplazamiento vertical de la gráfica. En el contexto físico, podría interpretarse como el volumen acumulado de un sólido cuya densidad varía proporcionalmente a x^2.

Figura 3.
Antiderivadas de la función de $f(x)$

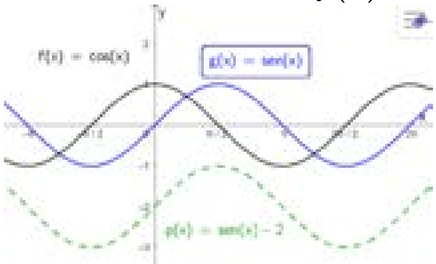


Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 3: Si $f(x) = \cos(x)$, entonces: $\int \cos(x)dx = \text{sen}(x) + C$. Del mismo modo, si $f(x) = \text{sen}(x)$: $\int \text{sen}(x)dx = -\cos(x) + C$. (Figura 4)

Estas relaciones muestran el carácter cíclico del cambio trigonométrico: la derivada y la integral alternan sus papeles en un proceso continuo. Tal simetría, como señala Stewart (2021), es una expresión matemática de la periodicidad natural del movimiento, visible en las ondas, los ciclos biológicos y las oscilaciones eléctricas.

Figura 4.
Ejemplo de antiderivadas de la función de $f(x) = sen(x)$

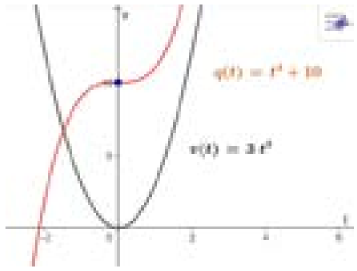


Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 4: Consideremos un tanque que se llena de agua a una velocidad variable $v(t) = 3t^2$ litros por minuto (Figura 5). Para encontrar el volumen total $V(x)$ en función del tiempo, se calcula la integral indefinida: $V(t) = \int 3t^2dt = t^3 + C$.

Si al inicio $(t = 0)$ el tanque contiene 10 litros, entonces $C = 10$. Por tanto, $V(t) = t^3 + 10$. Esto significa que el volumen aumenta con el cubo del tiempo, reflejando un proceso de llenado acelerado. Este tipo de problemas permiten comprender la integral como una acumulación concreta de magnitudes.

Figura 5.
Integral indefinida como acumulación concreta de magnitudes



Nota: Elaboración propia.

Tal como indica Freudenthal (1991), la comprensión profunda surge cuando el estudiante logra conectar el símbolo con la experiencia física o visual que representa.

Apoyo didáctico: Enseñar la integral indefinida no se reduce a memorizar fórmulas, sino a construir significado. Duval (2017) advierte que los estudiantes suelen comprender la derivada como una acción directa (calcular), pero les resulta difícil concebir la integración como una reconstrucción inversa. Este obstáculo se supera cuando se combinan representaciones múltiples: gráficas, numéricas y simbólicas.

Artigue (2009) propone que el aprendizaje del cálculo integral debe guiarse por la ingeniería didáctica, que promueve la exploración activa y el razonamiento reflexivo. Por ejemplo, utilizar software dinámico como GeoGebra permite que el estudiante observe cómo la pendiente de una curva (su derivada) se traduce en la forma de la antiderivada. Esa experiencia visual refuerza la comprensión conceptual del proceso y otorga sentido al signo de integración.

Godino y Batanero (1998) destacan que el conocimiento matemático se vuelve duradero cuando el estudiante reconoce las relaciones estructurales entre los objetos matemáticos. Así, integrar deja de ser una operación mecánica para convertirse en una estrategia de pensamiento: identificar patrones, reconstruir comportamientos y comprender cómo lo infinitesimal compone lo global.

Desde un enfoque cognitivo, Tall (2013) sostiene que la integral indefinida exige una “reconciliación de mundos”: el simbólico (la notación algebraica), el visual (la representación geométrica) y el conceptual (la idea de acumulación). La comprensión surge cuando estos mundos se integran en una red coherente de significados.

Integral definida: propiedades y significado geométrico

La integral definida es, junto con la derivada, una de las nociones más profundas y reveladoras del cálculo. En ella convergen siglos de pensamiento sobre el cambio, la medida y la continuidad.

Desde los métodos de exhausción de Arquímedes hasta la formulación rigurosa de Riemann, la humanidad ha buscado representar matemáticamente la suma infinita de pequeñas variaciones para comprender fenómenos reales. Como sostiene Boyer y Merzbach (2011), el desarrollo del concepto de integral fue “una de las hazañas intelectuales que transformaron la manera de pensar el movimiento y la cantidad”.

Mientras la derivada captura el instante, la integral expresa la totalidad: es el puente que une lo local con lo global. Esta idea, compartida por autores como Stewart (2021) y Apostol (1967), muestra que el cálculo no se reduce a procedimientos, sino que encarna una visión unificadora de la naturaleza. En este sentido, entender la integral definida implica comprender cómo las matemáticas hacen visible el cambio acumulado y cuantifican lo continuo.

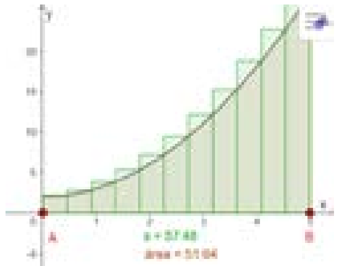
La integral definida puede entenderse como el resultado de sumar infinitas cantidades infinitamente pequeñas. Esa paradoja aparente se resuelve a través del límite, que permite transformar la aproximación discreta en una medida exacta. Según Stewart (2021), el proceso consiste en subdividir el intervalo [a,b] en secciones diminutas, calcular el valor de la función en cada punto y multiplicarlo por el ancho de la partición. Cuando el número de particiones tiende a infinito, el resultado converge al valor exacto de la integral.

Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región, pero parte del problema del área es hacer que esta idea intuitiva se precise dando una definición exacta.

Para definir una recta tangente, primero obtuvimos una aproximación de la pendiente de la recta tangente para las pendientes de rectas secantes y, a continuación, tomamos el límite de estas aproximaciones.

Para obtener una aproximación de la región S, vamos a considerar n - rectángulos en este caso por debajo o por encima de la parábola (Figura 6). Se puede considerar el área de la región S como el límite de las áreas de los rectángulos cuando se incrementa el número de éstos cometiendo un error respecto al valor exacto del área de superficie S, este valor del error tiende a disminuir cuando aumenta la cantidad de rectángulos, significando que puede ser aproximada dicha área, por la suma de las áreas de los rectángulos inferiores y/o superiores, tal como se muestra a continuación:

Figura 6.
Integral definida como área bajo la curva concreta de magnitudes.



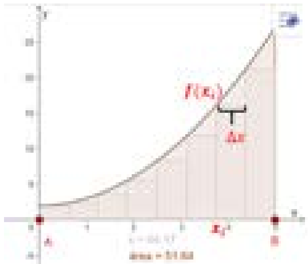
Nota: Elaboración propia.

A aproximar la *i-ésima* franja, S_i , con un rectángulo de ancho Δx y altura $f(x_i)$, que es el valor de f en el punto extremo de la izquierda, el área del i -ésimo rectángulo es $f(x_i)\Delta x$. (Figura 7)

Lo que concebimos de manera intuitiva como el área de S se aproxima con la suma de las áreas de estos n - rectángulos

$$R_n \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$$

Figura 7.
Área bajo la curva por aproximaciones de áreas de rectángulos



Nota: Elaboración propia.

Esta aproximación parece mejorarse a medida que se incrementa la cantidad de franjas; es decir, cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, definimos el área A de la región S de la manera siguiente:

El área **A** de la región **S** que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[f\left(x_1\right)\Delta x + f\left(x_2\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n\right)\Delta x\right]$$

En general, formamos sumas inferiores (y superiores) mediante la selección de los puntos muestra x_i^* de manera que es $f\left(x_i^*\right)$ el valor mínimo (y máximo) de f sobre el i-ésimo subintervalo. A menudo se usa la notación sigma para escribir de manera más compacta las sumas de muchos términos.

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x = f\left(x_1\right)\Delta x + f\left(x_2\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n\right)\Delta x$$

Así la expresión del área quedaría como:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$$

A este límite le damos un nombre y una notación especiales.

Integral definida: Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo [a, b] en **"n"** subintervalos de igual ancho

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}.$$

Sean $x_0(=a), x_1, x_2, \dots, x_n(=b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ los puntos muestras en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es

$$\int_a^b f\left(x\right) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$$

siempre que este límite exista y de el mismo valor para todas las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, decimos que f es integrable sobre [a, b].

1. **En la notación** $\int_a^b f\left(x\right) dx$, $f(x)$

se llama integrando, y a y b límites de integración, a es el límite inferior y b límite superior.

2. **La dx** indica simplemente que la variable independiente es x.
3. **La integral definida** $\int_a^b f\left(x\right) dx$

es un número que no depende de x. De hecho, podría utilizarse cualquier letra en lugar de x sin cambiar el valor de la integral:

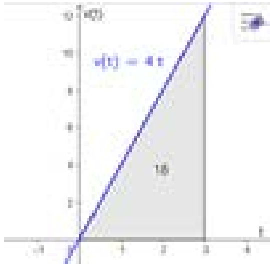
$$\int_a^b f\left(x\right) dx = \int_a^b f\left(t\right) dt = \int_a^b f\left(r\right) dr$$

Apostol (1967) interpreta este proceso como una síntesis entre lo algebraico y lo geométrico: la integral une la idea de suma (propia del álgebra) con la noción de área (propia de la geometría). Para él, "la integral representa el esfuerzo humano por medir lo inmedible", un intento de abarcar el infinito mediante el razonamiento. Leithold (1998) complementa esta visión subrayando el papel epistemológico de la integral: “Mientras la derivada se ocupa de la velocidad del cambio, la integral se interesa por el efecto acumulativo de dicho cambio”. Es decir, si derivar es descomponer, integrar es reconstruir.

Ejemplo 5: Si un automóvil acelera según la función $\mathrm{v}(\mathrm{t}) = 4\mathrm{t}$ (en metros por segundo), durante los primeros 3 segundos el desplazamiento total se obtiene integrando:

$$\int_0^3 4\mathrm{t}\,\mathrm{dt} = \left[2\mathrm{t}^2\right]_0^3 = 18$$

Figura 8.
Integral definida como suma de pequeños desplazamientos



Nota: Elaboración propia.

Aquí, la integral recoge la suma infinita de pequeños desplazamientos instantáneos. Lo que sería imposible calcular punto por punto se logra a través del concepto de límite, que convierte lo infinitesimal en medible (Figura 8).

Tall (2013) ofrece una interpretación cognitiva de este proceso: “El paso de las sumas discretas al límite continuo constituye una transición del pensamiento elemental al pensamiento formal”. Enseñar la integral, en consecuencia, no es solo enseñar un algoritmo, sino guiar al estudiante hacia una nueva forma de concebir las relaciones entre cambio y totalidad.

Significado geométrico y comparaciones de enfoque

Geométricamente, la integral definida representa el área orientada bajo la gráfica de una función. Si $\mathbf{f(x) > 0}$, el área es positiva; si $\mathbf{f(x) < 0}$, es negativa. Esta convención es clave para mantener la coherencia entre el valor geométrico y el significado algebraico. Según Thomas et al. (2024), el carácter orientado de la integral “garantiza que los resultados conserven información sobre la dirección del cambio”, lo cual la diferencia del mero cálculo de áreas.

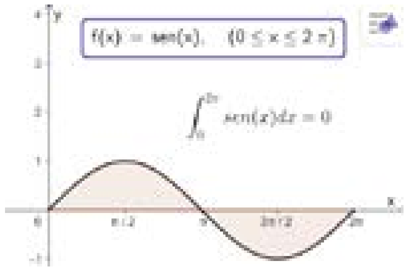
Apostol (1967) y Stewart (2021) coinciden en que la interpretación geométrica es el punto de partida más natural para la comprensión del concepto. Sin embargo, sus enfoques difieren en énfasis. Apostol propone comenzar desde la construcción axiomática, introduciendo las sumas de Riemann con precisión formal. Stewart, en cambio, sugiere partir de la visualización del área bajo la curva y posteriormente formalizar el procedimiento, un enfoque que ha demostrado ser más accesible didácticamente.

Ejemplo 6: Para ilustrar el sentido geométrico (Figura 9), consideremos $\mathrm{f(x)} = \mathrm{sen(x)}$ entre 0 y

$$2\pi, \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\left(\mathrm{x}\right) \mathrm{dx} = 0$$

Aunque hay dos regiones con área : una positiva y otra negativa. El resultado neto es cero.

Figura 9.
Integral definida como acumulación orientada



Nota: Elaboración propia.

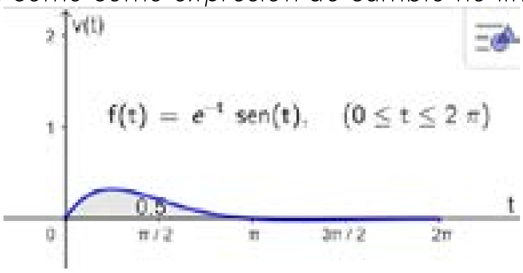
Este ejemplo evidencia que la integral no mide superficie, sino acumulación orientada. Como explica Blitzer (2018), “la integral no mide cuánto espacio ocupa algo, sino cuánto se ha acumulado en un proceso”.

Ejemplo 7: Imagina que una bomba alterna el flujo de agua, enviando líquido hacia adelante y hacia atrás con intensidad variable. Al principio, el movimiento es fuerte, pero poco a poco va perdiendo energía. Si representamos ese flujo con una función matemática, podríamos escribirla como $\mathrm{f(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\,\mathrm{sen(t)}$. Aquí, el factor $\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$ indica que la fuerza de la bomba disminuye con el tiempo, mientras que el seno expresa las oscilaciones del flujo: a veces el agua avanza (valores positivos) y otras veces retrocede (valores negativos) (Figura 10).

Si observamos, notaremos que las “olas” se hacen más pequeñas a medida que pasa el tiempo. Esto refleja un comportamiento físico natural: el sistema tiende al equilibrio. Si calculamos la integral definida de f(t) entre $\mathrm{t} = 0$ y $\mathrm{t} = 2\pi$ obtendremos un valor muy cercano a cero. En términos sencillos, aunque hubo movimiento constante, la cantidad total de agua transferida hacia un lado y hacia el otro se compensa.

Este sentido de equilibrio o compensación es uno de los significados más profundos de la integral definida. Nos permite comprender fenómenos donde el cambio no es lineal ni constante, sino el resultado de muchas pequeñas variaciones que se contrarrestan entre sí.

Figura 10.
Integral definida como como expresión de cambio no lineal



Nota: Elaboración propia.

Tal como señalan Stewart (2021) la integral se convierte en una herramienta para pensar en términos de acumulación y compensación, más que en simples sumas. Detrás de cada valor integral hay una historia de fuerzas que actúan, se equilibran y, finalmente, dejan su huella neta en el sistema.

Propiedades esenciales: una comparación de perspectivas

a) Linealidad

Las propiedades fundamentales de la integral definida consolidan su coherencia interna y su utilidad en la modelación de fenómenos reales:

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

Esta propiedad garantiza que la integral respeta las combinaciones lineales. Stewart (2021) la presenta como una consecuencia natural del carácter aditivo del área, mientras que Leithold (1998) la interpreta como una expresión de equilibrio entre lo algebraico y lo geométrico. Apostol (1967) agrega que la linealidad es la base del análisis funcional moderno, ya que convierte la integral en un operador lineal sobre un espacio de funciones.

b) Aditividad respecto al intervalo:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

En palabras de Thomas et al. (2024), esta propiedad traduce la continuidad física del cambio: acumular por tramos equivale a acumular en conjunto. En términos pedagógicos, esta regla puede ilustrarse fácilmente mediante gráficas o simulaciones de trayectorias acumuladas.

c) Cambio de orientación:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

Tall (2013) relaciona esta propiedad con la noción cognitiva de dirección: el signo de la integral ayuda a representar no solo cuánto se acumula, sino hacia dónde. Este enfoque favorece la comprensión del concepto de "área orientada", más allá de la noción de magnitud.

d) Constancia de la función:

$$\int_{a}^{b} kf(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Esta propiedad, que recuerda el cálculo de áreas rectangulares, actúa como punto de entrada intuitivo. Blitzer (2018) sugiere que iniciar con funciones constantes ayuda al estudiante a construir una base visual para el razonamiento integral.

Positividad: Si $f(x) \geq 0$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$$

Para Stewart (2021), esta propiedad vincula el razonamiento algebraico con la percepción geométrica: la integral no contradice la experiencia visual del área, sino que la extiende con sentido lógico.

Estas comparaciones entre autores revelan distintos modos de entender la integral: como una construcción axiomática (Apostol), como una experiencia visual (Stewart), o como un proceso cognitivo de abstracción (Tall). Integrar estos enfoques en la enseñanza permite abordar el cálculo desde múltiples dimensiones: conceptual, simbólica y visual, tal como sugiere Duval (2006) en su teoría de los registros de representación semiótica.

Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es uno de los descubrimientos más significativos de la historia de la matemática, y quizás el que mejor simboliza la unión entre el pensamiento geométrico y el pensamiento analítico. A través de él, se revela una correspondencia profunda entre dos procesos aparentemente opuestos: la derivación, que mide el cambio instantáneo, y la integración, que mide la acumulación total de ese cambio. En palabras de Stewart (2021), el TFC "no solo conecta las dos grandes ideas del cálculo, sino que las funde en un único principio de coherencia matemática y natural".

Apostol (1967) describe este teorema como una síntesis intelectual que "une lo infinitesimal y lo global, el movimiento y la forma, la velocidad y la distancia". Desde entonces, su enseñanza y aplicación se han convertido en la base para interpretar fenómenos tan diversos como el crecimiento exponencial, la oscilación armónica, la desintegración radiactiva o la difusión del calor. Comprender el TFC, por tanto, no es solo dominar una fórmula, sino acceder a una forma de pensamiento que une el cambio con la totalidad, lo local con lo universal.

El Teorema Fundamental del Cálculo se expresa en dos partes complementarias que revelan la relación inversa entre la derivada y la integral:

Primera parte (TFC I): Si f es continua sobre [a, b], entonces la función definida por

$$\mathrm{F(x)} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)dt}$$

$\mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}$ es continua sobre [a,b] y derivable sobre (a,b), y $\mathrm{F'(x)} = \mathrm{f(x)}$

Es decir, la derivada de la función acumulada F devuelve la función original f. En otras palabras, la integral genera una función cuya tasa de cambio instantánea es precisamente la que se integró.

Segunda parte (TFC II): Si F es una antiderivada de f en [a,b], entonces

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f(x)dx} = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$$

Esta segunda parte transforma la integral definida, concebida como un límite de sumas infinitas, en una operación algebraica sencilla: la diferencia de los valores de la antiderivada en los extremos. Según Thomas et al. (2024), esta equivalencia "otorga al cálculo un carácter de cierre lógico, donde las operaciones infinitas encuentran su expresión en una resta finita".

El TFC posee una profunda interpretación geométrica: el área bajo una curva y la pendiente de otra son manifestaciones del mismo fenómeno. Si $\mathrm{f(x)}$ representa la altura de una curva, entonces la función

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

mide el área acumulada bajo dicha curva desde a hasta x. La derivada de esta función, $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$, corresponde a la tasa de cambio de esa área acumulada, que resulta ser el valor de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Ejemplo 8: Si $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathbf{x}$, entonces

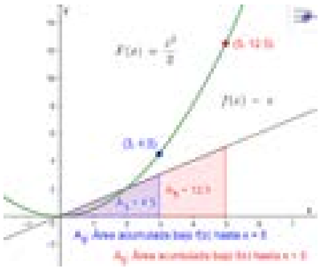
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \mathbf{t}\mathrm{d}\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

y $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = \mathrm{f}(\mathbf{x})$. Geométricamente, significa que la pendiente de la parábola

$$\mathrm{y} = \frac{\mathbf{x}^{2}}{2}$$

en cada punto coincide con la altura de la recta $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ (Figura 11). Tal relación encarna, como dice Leithold (1998), “la simetría perfecta entre forma y cambio”.

Figura 11.
Integral como simetría entre forma y cambio



Nota: Elaboración propia.

Esta visión no solo tiene valor teórico: al visualizar el área acumulada bajo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con herramientas como GeoGebra o Desmos, los estudiantes pueden observar cómo la pendiente de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ responde exactamente al comportamiento de la función generador

Esta visión no solo tiene valor teórico: al visualizar el área acumulada bajo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con herramientas como GeoGebra o Desmos, los estudiantes pueden observar cómo la pendiente de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ responde exactamente al comportamiento de la función generadora. Stewart (2021) enfatiza que “visualizar el crecimiento del área es comprender el cálculo como un lenguaje del movimiento”.

La fuerza explicativa del TFC se manifiesta especialmente cuando se aplica a funciones trascendentes, aquellas que trascienden las operaciones algebraicas básicas y modelan fenómenos reales como el crecimiento, la oscilación o el decaimiento.

Aplicaciones con funciones trascendentes

La fuerza explicativa del TFC se manifiesta especialmente cuando se aplica a funciones trascendentes, aquellas que trascienden las operaciones algebraicas básicas y modelan fenómenos reales como el crecimiento, la oscilación o el decaimiento.

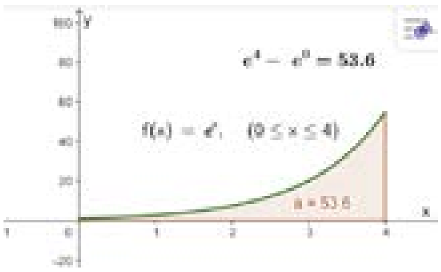
a) Función exponencial

Ejemplo 9: Sea $f(x) = e^x$ La integral definida en [a,b] es:

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a$$

Aquí, e^x es su propia derivada y su propia antiderivada. (Figura 12)

Figura 12.
Integral definida para describir los procesos de crecimiento poblacional



Nota: Elaboración propia.

Esto implica que la tasa de crecimiento de la función es proporcional a su valor actual, una propiedad que describe con exactitud los procesos de crecimiento poblacional, propagación viral o interés compuesto. Apostol (1967) considera este ejemplo el paradigma del TFC: la función que se reproduce a sí misma en el cambio expresa la esencia del cálculo continuo. Thomas et al. (2024) subrayan que “en e^x   la naturaleza revela su propio lenguaje de crecimiento”.

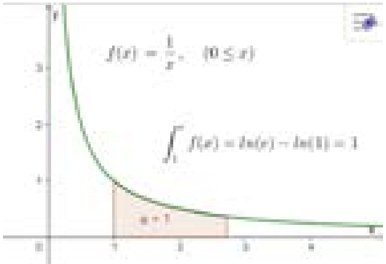
b) Función logarítmica

Ejemplo 10: Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, con $x > 0$:

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

La función logarítmica surge como la antiderivada de $\frac{1}{x}$, mostrando que el área bajo la hipérbola 1/x entre 1 y e es exactamente 1 (Figura 13).

Figura 13.
Integral definida como expresión de la acumulación proporcional



Nota: Elaboración propia.

Stewart (2021) lo describe como "una revelación geométrica del crecimiento relativo": mientras el exponencial representa el crecimiento absoluto, el logaritmo mide la acumulación proporcional. En términos físicos, esta relación aparece en procesos donde la tasa de cambio depende inversamente del tamaño, como la descarga de un condensador o la difusión térmica.

c) Funciones trigonométricas
Ejemplo 11: Sea

$$\mathrm{f(x) = sen(x)}: \int_0^{\pi} \mathrm{sen(x)\,dx} = [-\cos(\mathrm{x})]_0^{\pi} = 2$$

Aquí, el área bajo la curva seno desde 0 hasta ϖ es positiva, representando la acumulación neta de movimiento hacia arriba. Si se integra en un ciclo completo,

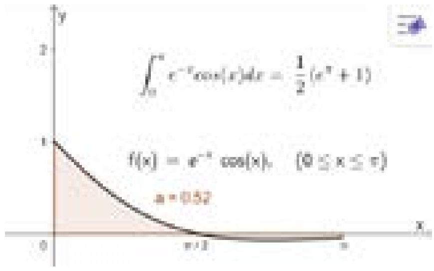
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen(x)\,dx} = 0$$

el resultado es nulo, lo que refleja el equilibrio entre los desplazamientos positivos y negativos. Esta simetría, como señala Leithold (1998), muestra que el cálculo no solo mide magnitudes, sino también direcciones: "la integral no cuenta solo cuánto, sino en qué sentido".

En contextos físicos, el TFC aplicado a funciones trigonométricas permite calcular desplazamientos en movimientos armónicos, o la energía promedio en un ciclo de oscilación.

d) Función combinada trascendente
Ejemplo 12: Sea $\mathrm{f(x) = e^{-x}\cos(x)}$. En este caso, la función combina el decrecimiento exponencial con la oscilación del coseno (Figura 14). Si calculamos la integral definida entre 0 y π.

Figura 14.
Integral definida como expresión de un movimiento amortiguado



Nota: Elaboración propia.

Esta expresión representa un fenómeno muy común en física: el movimiento de un sistema amortiguado, como el de un resorte que vibra cada vez con menor amplitud.

La parte exponencial e^{-x} reduce progresivamente la intensidad de las oscilaciones, mostrando cómo la energía del sistema se disipa con el tiempo. Tal como señalan Thomas et al. (2024), este tipo de integrales permiten describir cómo el cambio se modula bajo leyes simultáneamente exponenciales y periódicas.

El Teorema Fundamental del Cálculo no es solo una relación entre operaciones, sino una visión sobre la continuidad del mundo. En él, la matemática se vuelve filosofía: toda acumulación nace del cambio, y todo cambio, acumulado, forma una totalidad. Apostol (1967) lo llama "el alma del análisis"; Stewart (2021) lo considera "la puerta entre los dos mundos del cálculo"; y Tall (2013) lo interpreta como "el puente entre la percepción y el pensamiento simbólico".

Apoyo didáctico: desde una perspectiva educativa, el TFC representa un momento de síntesis conceptual. Según Tall (2013), aprender este teorema es "el paso en que el pensamiento matemático abandona lo aritmético y entra en el mundo de los procesos infinitos". Para que el estudiante lo comprenda, debe experimentar el vínculo entre el área y la pendiente, entre la suma y el cambio.

Métodos de integración: sustitución, partes y fracciones parciales

La integración representa el proceso inverso de la derivación. Mientras la derivada analiza la variación local e instantánea de una función, la integral busca reconstruir el comportamiento global acumulado de esa variación. En este sentido, los métodos de integración son herramientas conceptuales que permiten recuperar la función original o encontrar el área, el volumen o el cambio total asociado a una magnitud variable.

Stewart (2021) explica que integrar "es reunir los infinitos fragmentos en los que la derivada descompone una función". Desde un punto de vista epistemológico, la integración traduce la continuidad en medida, la fluidez en estructura, y el cambio en acumulación. Así, los métodos de integración no son meros procedimientos algebraicos, sino formas de pensamiento que permiten reconstruir lo continuo a partir de lo infinitesimal.

A lo largo de la historia del cálculo, distintos métodos han sido desarrollados para abordar integrales que no pueden resolverse directamente. Entre ellos destacan tres por su importancia y su valor formativo: el método de sustitución o cambio de variable, la integración por partes, y la descomposición en fracciones parciales. Cada uno responde a una lógica distinta del pensamiento analítico: transformar, equilibrar y descomponer, respectivamente.

La sustitución: el arte de transformar

El método de sustitución se basa en una idea profundamente conceptual: toda función compuesta puede simplificarse si se introduce una nueva variable que capture su estructura interna. Formalmente, este método "revierte" la regla de la cadena en la derivación. Si $(\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x})))' = \mathrm{f}'(\mathrm{g}(\mathrm{x})) \cdot \mathrm{g}'(\mathrm{x})$, entonces, al integrar, se busca una función que, al derivarse, produzca una composición semejante.

Si se define $\mathrm{u} = \mathrm{g}(\mathrm{x})$, entonces $\mathrm{du} = \mathrm{g}'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$, y se cumple:

$$\int \mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))\mathrm{g}'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int \mathrm{f}(\mathrm{u})\,\mathrm{du}$$

Esta transformación convierte un problema complejo en otro más simple, trasladando la dificultad desde la función hacia el cambio de variable.

Apostol (1967) sostiene que el cambio de variable no solo es un recurso algebraico, sino una forma de "ajustar la mirada" sobre la función, para descubrir en ella un patrón de derivada oculta. En el aula, esto significa guiar al estudiante a reconocer estructuras derivativas dentro de expresiones aparentemente inabordables.

Ejemplo 13: Sea

$$\int 3\mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}\,\mathrm{dx}$$

Se observa que la derivada de x^3 es $3\mathrm{x}^2$, lo cual sugiere el cambio $\mathrm{u} = \mathrm{x}^3$, $\mathrm{du} = 3\mathrm{x}^2\mathrm{dx}$.

Así: $\int \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\mathrm{du} = \mathrm{e}^{\mathrm{u}} + \mathrm{C} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3} + \mathrm{C}$. El método simplifica el proceso y refuerza la comprensión de la relación entre composición y derivación inversa.

Ejemplo 14: Pudiéramos calcular: $\int \frac{\mathrm{sen}(5x)}{\cos^2(5x)}dx$

Sea $u = \cos(5x)$,de modo que $du = -5\,\mathrm{sen}(5x)dx$.
Sustituyendo:

$$\int \frac{\mathrm{sen}(5x)}{\cos^2(5x)}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{5u} + C = \frac{1}{5\cos(5x)} + C\cdot$$

Aquí la sustitución revela el patrón subyacente y convierte una función trascendente en una expresión racional, unificando así dos mundos del análisis.

Ejemplo 15: Calcular $\int \frac{x}{1+x^2}dx$. Si $u = 1 + x^2$, entonces $du = 2x\ \ dx$.
La integral se transforma en:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln\left|u\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$$

El resultado expresa un vínculo entre las funciones racionales y logarítmicas, reforzando la noción de continuidad entre lo algebraico y lo trascendente.

Desde la didáctica, Tall (2013) sugiere que el método de sustitución debe enseñarse como una “metáfora del cambio de perspectiva”: lo importante no es solo cambiar la variable, sino aprender a ver una estructura de derivación donde antes solo había complejidad. En la enseñanza visual, esta idea se puede ilustrar con diagramas que muestran la “transformación del eje” de x a u, haciendo visible cómo cambia la escala de acumulación.

La integración por partes: el equilibrio del cambio
El método de integración por partes se apoya en la regla del producto de la derivada:
$(uv)' = u'v + uv'$. Al integrar ambos lados, se obtiene: $\int udv = uv - \int vdu$. Esta identidad revela una idea profunda: el cálculo no elimina el cambio, lo redistribuye. Si una parte se complica al derivarla, puede compensarse con otra más manejable al integrarse.

Leithold (1998) considera este método una “metáfora del equilibrio” dentro del cálculo, donde las funciones cooperan simbólicamente. En contextos pedagógicos, ayuda a comprender la dualidad entre derivación e integración, mostrando que ambas no se oponen, sino que se complementan.

Ejemplo 16: Producto algebraico-exponencial $\int xe^{2x}dx$. Sea $u = x, dv = e^{2x}dx$, entonces $du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int xe^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{4}\left(2x - 1\right) + C$$

Esta relación es típica en modelos de crecimiento acelerado o fenómenos de transferencia de calor.

Ejemplo 17: Producto algebraico - exponencial .

Sea $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{x}}, \mathbf{dv} = \mathrm{e}^{2x}\mathbf{dx.}$, entonces $\mathbf{du} = \mathbf{dx}, \mathrm{v} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$.

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{4}(2x - 1) + C.$$

Esta relación es típica en modelos de crecimiento acelerado o fenómenos de transferencia de calor.

Ejemplo 18: Aplicación trigonométrica $\int \mathrm{xsen(x)dx}$

Sea $\mathrm{u = x, dv = sen(x)dx, du = dx, v = -cos(x)}$:

$$\int \mathrm{xsen(x)dx} = -\mathrm{xcos(x)} + \int \mathrm{cos(x)dx} = -\mathrm{xcos(x)} + \mathrm{sen(x)} + C.$$

Aquí la interacción entre la función lineal y la oscilatoria refleja la relación entre movimiento uniforme y periódico, típica en física y mecánica.

Para Tall (2013), enseñar este método implica hacer visible el razonamiento reversible del cálculo: derivar y luego integrar, integrando mientras se deriva. En ese ir y venir simbólico, el estudiante percibe el cálculo no como una colección de fórmulas, sino como un lenguaje coherente del cambio.

Fracciones parciales: la descomposición del cambio

Las fracciones parciales representan un método de análisis estructural: una función racional puede expresarse como suma de términos más simples, cada uno con una antiderivada conocida. Este método, en apariencia algebraico, expresa un principio filosófico profundo: para comprender lo complejo, hay que descomponerlo en partes elementales.

Stewart (2021) explica que “integrar una fracción compuesta es un acto de lectura estructural: se lee la función no como un todo, sino como un sistema de relaciones”. En la enseñanza, esta técnica promueve la comprensión analítica y refuerza la conexión entre álgebra e integración.

El método de fracciones parciales es una técnica algebraica utilizada para integrar funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

donde $\mathrm{P(x)}$ y $\mathrm{Q(x)}$ son polinomios y el grado (deg) de $\mathrm{P(x)}$ es menor que el de $\mathrm{Q(x)}$. Si el grado de $\mathrm{P(x)}$ es mayor o igual al de $\mathrm{Q(x)}$, primero se debe realizar una división polinómica para obtener la siguiente igualdad

$$\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \mathrm{S(x)} + \frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$$

donde S y R también son funciones polinomiales.

Este método convierte la fracción compleja en una suma de fracciones más simples, llamadas fracciones parciales, que se pueden integrar con mayor facilidad.

Pasos método de Fracciones Parciales para Integración de Funciones Racionales

1. **Verificar si se requiere división:** Antes de aplicar el método, asegúrate de que: $\mathbf{deg}(\mathrm{P(x)}) < \mathbf{deg}(\mathrm{Q(x)})$. Si no es así, realiza la división larga o sintética.
2. **Factorizar el denominador Q(x) tanto como sea posible:** Descompón $\mathrm{Q(x)}$ en factores lineales y/o cuadráticos irreducibles. Cualquier polinomio $\mathrm{Q(x)}$ puede factorizarte como como un producto de factores lineales (de la forma ax+b) y factores cuadráticos irreducible (de la forma $\mathrm{ax^2 + bx + c, dondeb^2 - 4ac < 0}$.
3. **Expresar la función racional propia** $\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$

como una suma de fracciones parciales de la forma $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{(x-a)^i}}$ o bien $\frac{\mathrm{Ax+B}}{\mathrm{(ax^2+bx+c)^j}}$

Tipos de factores

Plantear la descomposición: Según los tipos de factores, se asignan fracciones parciales específicas.

a) El denominador Q(x) es un producto de factores lineales distintos:

Si $\mathrm{Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \ldots (a_kx + b_k)}$, donde no hay factores repetidos (y ninguno factor es múltiplo constante de otro). En este caso existen constantes $\mathrm{A_1, A_2, A_3 \ldots A_k}$ tales que:

$$\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{\mathrm{A_1}}{\mathrm{(a_1x + b_1)}} + \frac{\mathrm{A_2}}{\mathrm{(a_2x + b_2)}} + \ldots + \frac{\mathrm{A_k}}{\mathrm{(a_kx + b_k)}} \mathrm{(I)}$$

b) Q(x) es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten:

Si $Q(x) = (a_1x + b_1)^r$ entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r} (II)$$

c) Q(x) contiene factores cuadráticos irreductibles, de los que ninguno se repite:

Si $Q(x)$tiene el factor $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$:

entonces $\frac{R(x)}{Q(x)}$

tendrá además de las expresiones I y II, un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\left(III\right)$$

d) Q(x) contiene un factor cuadrático irreductible repetido.

Si $Q(x)$ tiene el factor $\left(ax^2 + bx + c\right)^r$, donde $b^2 - 4ac < 0$: entonces en lugar de una única fracción parcial tipo (III), la suma:

$$\frac{A_1x+b_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+b_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_rx+b_r}{(ax^2+bx+c)^r} \left(IV\right)$$

ocurre en la descomposición en fracciones parciales de cada uno de los términos en (IV) puede integrarse utilizando una sustitución o primero completando el cuadrado.

4. Resolver la integral a partir de la descomposición obtenida

Ejemplo 19:

$$\int \frac{x+3}{x^2+3x}dx.$$

Se factoriza: $x^2 + 3x = x\left(x + 3\right)$

$\frac{x+3}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}.$

Multiplicando por $x(x + 3)$: $x + 3 = A\left(x + 3\right) + Bx$.

Resolviendo se obtiene $A = 1$ y $B = 0$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right)dx = \ln\left|x\right| + \ln\left|x + 3\right| + C$$

Ejemplo 20:

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$$

Paso 1: Verificar si la función es racional propia

El grado del numerador es 4 y el del denominador es 3. Como el numerador tiene mayor grado, se requiere realizar una división polinómica.

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

Paso 2: Factorizar el denominador Q(x) tanto como sea posible

$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ al factorizar de obtiene:

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$

Hemos obtenido una descomposición de Q(x) en producto de factores lineales de los cuales alguno se repite, de ahí que la suma de fracciones parciales se obtiene de la siguiente manera:

Paso 3: Expresar la función racional propia como una suma de fracciones parciales

$\frac{4x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$ por tanto a partir de esta igualdad

$4x = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)$ obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} A + C = 0 \ (1) \\ B - 2C = 4 \ (2) \\ -A + B + C = 0 \ (3) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene $A = 1,\ B = 2$ y $C = -1$ de ahí que

Paso 4: Plantear la descomposición y resolver la integral

$$\frac{4x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx = \int\left[x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right]dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

El estudio de los métodos de integración revela algo más profundo que su uso técnico: muestra cómo la matemática organiza la complejidad a través de la estructura. En la sustitución, se aprende a ver el cambio desde otro marco; en la integración por partes, se aprende a equilibrar procesos complementarios; y en las fracciones parciales, a entender la totalidad desde sus componentes.

Apostol (1967) insiste en que el poder del cálculo reside en su capacidad de representar procesos naturales (movimiento, flujo, crecimiento, disipación) con símbolos que el pensamiento puede manipular sin perder el significado físico. Desde esta perspectiva, los métodos de integración no son solo instrumentos, sino modelos cognitivos: maneras de pensar la transformación.

Tall (2013) propone una visión “triádica” del aprendizaje del cálculo: el estudiante debe articular tres mundos del pensamiento matemático (el sensorial-geométrico, el simbólico y el formal). En esa línea, enseñar estos métodos no puede reducirse a la práctica mecánica: requiere explorar su sentido geométrico y su coherencia simbólica.

Stewart (2021) y Thomas et al. (2024) coinciden en que el dominio de las técnicas de integración prepara al estudiante para enfrentar problemas reales en física, ingeniería y economía, donde las funciones modelan procesos acumulativos. Integrar es comprender cómo los pequeños cambios, sumados infinitamente, generan magnitudes finitas y observables.

A modo de conclusión, los métodos de integración constituyen una de las cumbres del pensamiento analítico. Cada uno de ellos ofrece una metáfora del conocimiento: la sustitución representa el cambio de perspectiva; la integración por partes, la reciprocidad de los procesos; y las fracciones parciales, la comprensión de lo complejo mediante lo simple.

A través de estos métodos, el cálculo se revela como una ciencia del equilibrio: entre lo infinitesimal y lo total, entre el análisis y la síntesis, entre el símbolo y la realidad. Comprenderlos es adentrarse en una forma de razonamiento que, como dice Leithold (1998), “no busca solo resolver, sino comprender el sentido del cambio”.

Aplicaciones de la integral en el análisis y la modelación del cambio

Comprender la integral, en sus formas definida e indefinida, implica adentrarse en la estructura profunda del cálculo: la relación entre acumulación y cambio. Desde un punto de vista epistemológico, la integral emerge como una respuesta al problema de sumar una cantidad infinita de pequeñas variaciones para reconstruir una magnitud total. Newton y Leibniz, aunque desde perspectivas conceptuales distintas, coincidieron en que la integración es el proceso inverso de la diferenciación: mientras la derivada mide el cambio instantáneo, la integral mide la suma acumulativa de esos cambios (Boyer y Merzbach, 2011).

Esta dualidad se formaliza en el Teorema Fundamental del Cálculo, el cual establece que si una función f es continua en un intervalo [a,b] y F es su antiderivada, entonces:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

De esta relación se desprenden las dos dimensiones esenciales del cálculo integral:

La **integral indefinida**, que busca funciones primitivas.

La **integral definida**, que cuantifica magnitudes acumuladas entre límites.

Stewart (2021) señala que esta relación no solo une dos procesos matemáticos, sino también dos maneras de interpretar el mundo: el análisis local del cambio y la síntesis global de la acumulación. En la educación matemática, Duval (2006) agrega que estas concepciones requieren ser traducidas entre distintos registros semióticos: el gráfico (área bajo la curva), el simbólico (notación integral) y el verbal (interpretación conceptual).

La integral indefinida se entiende como el conjunto de todas las antiderivadas de una función $\mathrm{f(x)}$, donde $\mathrm{F'(x) = f(x)}$ y C es una constante. u papel teórico radica en revertir el proceso de la derivación. Este proceso de "reconstrucción" o "síntesis" del cambio, según Apostol (1967), es esencial para comprender cómo una tasa de variación puede originar una magnitud acumulada.

Desde una perspectiva cognitiva, Artigue (2009) subraya que muchos estudiantes interpretan la integración como una operación mecánica de aplicar fórmulas, sin comprender su relación con el cambio. Por ello, es clave promover tareas que conecten el significado de "tasa" con "acumulación".

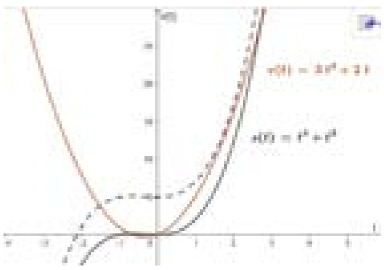
Ejemplo 21: Supongamos que un automóvil se mueve con una velocidad variable $\mathrm{v\left(t\right) = 3t^2 + 2t}$, donde v está en metros por segundo y t en segundos (Figura 15). Se desea determinar la posición $\mathrm{s(t)}$ del automóvil en función del tiempo, sabiendo que al instante inicial $\mathrm{t = 0}$ se encontraba a 5 metros del origen.

Para hallar la posición s(t), se integra la velocidad:

$$\mathrm{s\left(t\right) = \int \left(3t^2 + 2t\right)dt = t^3 + t^2 + C}$$

Aplicando la condición inicial $\mathrm{s(0) = 5}$ se obtiene $\mathrm{C = 5}$. Por tanto, la función posición queda determinada como: $\mathrm{s\left(t\right) = t^3 + t^2 + 5}$.

Figura 15.
Integral como un proceso de reconstrucción del movimiento



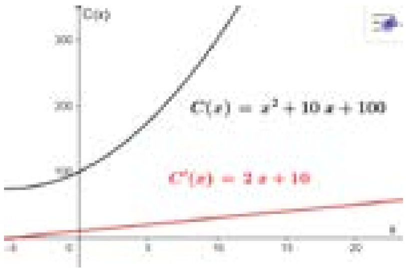
Nota: Elaboración propia.

Este resultado no solo es algebraico, sino también interpretativo: la posición se obtiene acumulando los desplazamientos infinitesimales generados por la velocidad a lo largo del tiempo. Tall (2013) sostiene que este tipo de ejemplo permite al estudiante visualizar la integral como un proceso de reconstrucción del movimiento más que como una simple manipulación simbólica.

En economía, el costo marginal $C'(x)$ representa la variación del costo total por unidad adicional producida. Si el costo marginal está dado por $C'(x) = 2x + 10$, el costo total se obtiene mediante integración:

$$C(x) = \int (2x + 10)dx = x^2 + 10x + C_0. \text{ (Figura 16)}$$

Figura 16.
Integral como variación del costo



Nota: Elaboración propia.

Si el costo fijo inicial es de 100 unidades monetarias, entonces: $C(x) = x^2 + 10x + 100$.

Este modelo ilustra la función económica de la integral indefinida: reconstruir magnitudes globales (costos, ingresos, beneficios) a partir de tasas de variación.

La integral definida como herramienta para medir, comparar y predecir fenómenos

La integral definida surge de la necesidad de calcular áreas, volúmenes o acumulaciones finitas. Riemann formuló su definición a partir del límite de sumas:

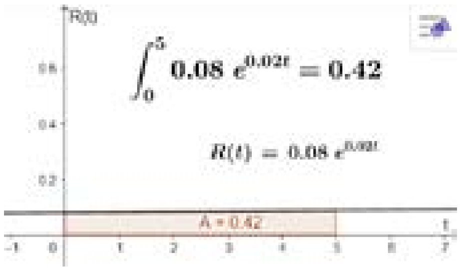
$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

Esta formulación expresa el principio de acumulación continua: sumar infinitas pequeñas contribuciones de la variable dependiente $f(x)$ multiplicadas por un cambio infinitesimal dx.

Esta concepción representa una de las mayores síntesis del pensamiento científico: medir lo continuo mediante lo infinitesimal. A través de la integral, se hace cuantificable el cambio que no puede contarse, solo medirse.

Ejemplo 22: Un joven decide invertir una cantidad de dinero en un fondo que promete un crecimiento continuo a lo largo del tiempo. El comportamiento de la rentabilidad se describe mediante la función $r(t) = 0.08e^{0.02t}$, donde r(t) representa la tasa de ganancia instantánea en el año t (Figura 17). El objetivo es conocer cuál será el rendimiento total acumulado durante los primeros cinco años de inversión.

Figura 17.
Integral como crecimiento de la inversión



Nota: Elaboración propia.

Para determinarlo, se calcula la integral:

$$R = \int_0^5 0.08e^{0.02t}dt = \left[0.08 \cdot 50e^{0.02t}\right]_0^5 = \left[4e^{0.02t}\right]_0^5$$

$$e^{0.1} \approx 1.105170,$$

$$R = 4\,(1.105170 - 1) = 4\,(0.105170) \approx 0.42068$$

El resultado de esta integral muestra cuánto ha crecido la inversión, considerando que el incremento no es lineal, sino exponencial, es decir, cada ganancia genera nuevas ganancias sobre sí misma. En términos prácticos, la integral expresa cómo el valor se acumula infinitesimalmente con el paso del tiempo.

Este tipo de modelos se utiliza con frecuencia en finanzas, biología o física, pues muchos procesos naturales siguen patrones de crecimiento continuo. Stewart (2021) explica que la integral exponencial es una herramienta esencial para describir fenómenos donde el cambio se produce de forma proporcional al valor actual. A su vez, Artigue (2009) y Duval (2006) resaltan que comprender este tipo de relaciones requiere una interpretación múltiple: ver la integral no solo como un procedimiento algebraico, sino como una representación visual del cambio acumulado que ocurre a lo largo del tiempo.

Aplicaciones de la integral definida en la física

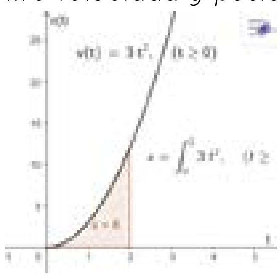
La integral definida constituye una herramienta esencial para la comprensión de los fenómenos físicos, pues permite cuantificar magnitudes que varían de manera continua. En la física, muchas relaciones entre variables se expresan como tasas de cambio: la velocidad respecto del tiempo, la fuerza respecto de la posición o la densidad respecto del volumen. La integral, en consecuencia, actúa como el proceso inverso de la derivación, transformando una magnitud diferencial en una acumulativa. Según Stewart (2021), la integral definida representa la suma de infinitos aportes diferenciales que, en conjunto, describen una magnitud global del sistema físico.

En cinemática, la integral definida traduce la relación entre velocidad y posición. Si la velocidad de un móvil depende del tiempo, $v(t)$, el desplazamiento total entre t1 y t2 se determina mediante:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v\left(t\right)dt$$

Figura 18.

Integral como relación entre velocidad y posición



Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 23: un objeto que se mueve con $v(t) = 3t^2 m/s$ durante 2 segundos recorre:

$$S = \int_{0}^{2} 3t^2 dt = t^3\Big|_0^2 = 8m$$ (Figura 18).

Este uso de la integral no solo permite determinar desplazamientos, sino que también fundamenta el concepto de velocidad media y acelera la comprensión de la relación entre las gráficas $v(t)$ y $s(t)$.

La integral definida se emplea igualmente para calcular la energía térmica transferida cuando el flujo de calor depende del tiempo o de la temperatura. Si la potencia térmica $Q'(t)$ varía durante un proceso, el calor total transferido se determina mediante:

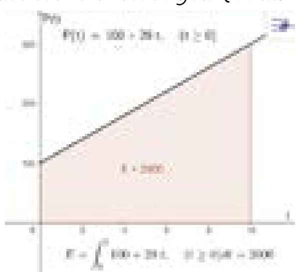
$$Q = \int_{t_1}^{t_2} Q'\left(t\right)dt$$

La integral también permite determinar la energía total generada o consumida por un sistema cuando la potencia varía con el tiempo. Si la potencia instantánea $P(t)$ describe la tasa de trabajo o energía por unidad de tiempo, la energía total se calcula mediante:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P\left(t\right)dt$$

Ejemplo 24: Un motor parte con una potencia de 100 W en $t = 0s$ y aumenta de forma lineal hasta 300 W en $t = 10s$. (Figura 19) ¿Cuánta energía (trabajo) entrega el motor durante esos 10 s ?

Figura 19.
Integral definida para cálculo de energía (Trabajo)



Nota: Elaboración propia.

Como el aumento es lineal, la potencia puede escribirse como $P(t) = P_0 + mt$, donde m es la pendiente (cuánto crece la potencia por segundo). Al hallar la pendiente tenemos:

$$m = \frac{P_{10}-P_0}{10-0} = \frac{300-100}{10} = 20\ W/s$$

Entonces $P(t) = 100 + 20t$

La energía entregada es el área bajo la curva de potencia:

$E = \int_0^{10} P\left(t\right)dt = \int_0^{10} (100 + 20t)dt$. Calculando se obtiene:

$$E = \left[100t + 10t^2\right]_0^{10}$$

$$E = \left(100 \cdot 10 + 10 \cdot 10^2\right) - (0)$$

$$E = 1000 + 1000 = 2000\ J$$

El motor entrega 2000 joules en esos diez segundos. Como la potencia crece de manera uniforme, el resultado coincide con multiplicar el promedio de las potencias inicial y final por el tiempo, lo que confirma el cálculo integral.

Desde una perspectiva teórica, la integral definida unifica múltiples conceptos físicos bajo una misma estructura matemática: la acumulación de un cambio infinitesimal. Esta interpretación, compartida por autores como Strang (2019) y Stewart (2021), permite conectar la física experimental con el razonamiento matemático, fortaleciendo la comprensión de cómo las leyes del cambio se expresan cuantitativamente. Además, su enseñanza facilita que el estudiante perciba la integral como una herramienta que traduce la variación continua del mundo físico en un modelo matemático formal (Artigue, 2009).

Aplicaciones de la integral definida en economía

La integral definida desempeña un papel clave en el análisis económico porque permite calcular el valor total de una magnitud que cambia de manera continua. En términos simples, integra los efectos acumulativos de pequeñas variaciones a lo largo de un intervalo, lo que la convierte en una herramienta esencial para interpretar fenómenos como la producción, el costo, el ingreso o el bienestar del consumidor. Su utilidad radica en que muchas variables económicas no permanecen constantes: cambian con el tiempo, con el nivel de producción o con el precio, y la integral definida capta precisamente esas variaciones en su totalidad (Chiang & Wainwright, 2005).

El costo total a partir del costo marginal

Cuando una empresa produce bienes, el costo marginal C′ (q) representa el incremento en el costo total por fabricar una unidad adicional. Si se conoce cómo varía el costo marginal con la cantidad producida, el costo total entre dos niveles de producción puede calcularse mediante una integral definida:

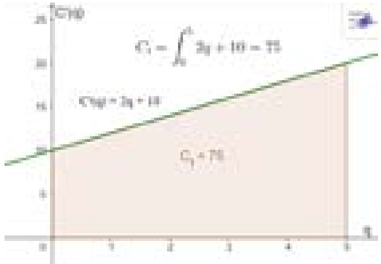
$$\mathrm{C}\left(\mathrm{q}_2\right)-\mathrm{C}\left(\mathrm{q}_1\right)=\int_{\mathrm{q}_1}^{\mathrm{q}_2}\mathrm{C}'\left(\mathrm{q}\right)\mathrm{dq}$$

Ejemplo 25: Supongamos que una fábrica de envases tiene un costo marginal dado por $\mathrm{C}'(\mathrm{q})=2\mathrm{q}+10$, donde q representa miles de unidades producidas (Figura 20). Si la empresa pasa de producir 0 a 5 miles de unidades, el aumento en el costo total es:

$$\int_0^5(2\mathrm{q}+10)\mathrm{dq}=\left[\mathrm{q}^2+10\mathrm{q}\right]_0^5=(25+50)-0=75.$$

Esto significa que el costo total se incrementa en 75 unidades monetarias. El área bajo la curva del costo marginal muestra gráficamente la acumulación de los pequeños aumentos de costo a lo largo de la producción. Según Varian (2019), este razonamiento permite entender cómo los costos se distribuyen y cómo una empresa puede estimar el punto en que la producción deja de ser rentable.

Figura 20.
Integral definida para cálculo de costo marginal



Nota: Elaboración propia.

El ingreso total desde la función de precio

Cuando el precio de venta depende de la cantidad ofrecida, el ingreso total no puede calcularse simplemente multiplicando precio por cantidad, ya que el precio cambia con el nivel de ventas. En ese caso, el ingreso total se obtiene integrando la función de precio $\mathrm{p(q)}$ respecto a la cantidad:

$$\mathrm{I} = \int_0^{\mathrm{q}^*} \mathrm{C}'(\mathrm{q})\,\mathrm{dq}$$

Esta integral representa el área bajo la curva de la función de precio, desde $\mathrm{q} = 0$ hasta una cantidad q^*. Cada pequeño incremento dq multiplica el precio asociado $\mathrm{p(q)}$, acumulando así el valor total de los ingresos generados por todas las unidades vendidas.

En términos económicos, esta formulación permite capturar las variaciones del precio a lo largo del rango de cantidades, proporcionando una medida más realista del ingreso total que un cálculo lineal o constante.

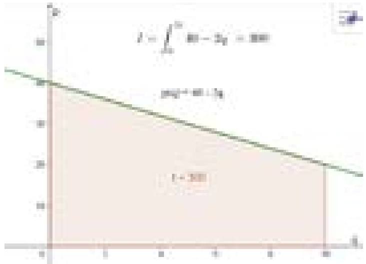
Ejemplo 26: Imaginemos una empresa que vende un producto con función de demanda $\mathrm{p(q)} = 40 - 2\mathrm{q}$, donde p es el precio en dólares y q la cantidad vendida (Figura 21). Si la empresa vende hasta 10 unidades, el ingreso total es:

$$\mathrm{I} = \int_0^{10} (40 - 2\mathrm{q})\,\mathrm{dq} = \left[40\mathrm{q} - \mathrm{q}^2\right]_0^{10} = 400 - 100 = 300$$

Esto significa que el ingreso total acumulado es de 300 dólares.

El área bajo la curva del precio representa los ingresos de todas las unidades vendidas, incluso cuando el precio disminuye por cada unidad adicional. Este tipo de cálculo es común en la microeconomía para analizar los efectos de los precios variables sobre los ingresos de una empresa (Nicholson & Snyder, 2018).

Figura 21.
Integral definida para cálculo de ingresos totales



Nota. Elaboración propia

El valor acumulado de un flujo continuo

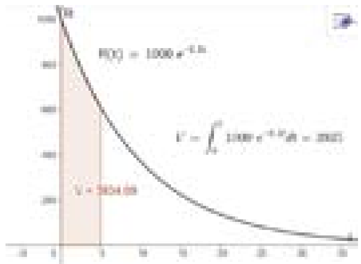
En finanzas y macroeconomía, las integrales definidas se utilizan para calcular flujos continuos de ingreso, gasto o inversión. Si una empresa recibe un ingreso variable $\mathrm{R(t)}$ a lo largo del tiempo, el ingreso total entre los tiempos $\mathrm{t_1}$ y $\mathrm{t_2}$ se obtiene mediante:

$$\mathrm{V} = \int_{\mathrm{t_1}}^{\mathrm{t_2}} \mathrm{R(t)\,dt}$$

Ejemplo 27:

Consideremos una empresa que obtiene ingresos según la función $\mathrm{R(t)} = 1000\mathrm{e}^{-0.1\mathrm{t}}$ (Figura 22), donde t está en años y el ingreso disminuye ligeramente con el tiempo debido a la reducción de la demanda.

Figura 22.
Integral definida para cálculo de ingresos totales



Nota: Elaboración propia.

El ingreso total durante los primeros 5 años será:

$$\mathrm{V} = \int_0^5 1000\mathrm{e}^{-0.1\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = [-10000\mathrm{e}^{-0.1\mathrm{t}}]_0^5 = -10000(\mathrm{e}^{-0.5} - 1) \approx 3935$$

Esto significa que, durante ese periodo, la empresa obtiene un ingreso acumulado de aproximadamente 3935 unidades monetarias. Como señala Merton (1990), este tipo de integral permite analizar cómo varía el valor de una inversión o flujo financiero cuando la tasa de cambio no es constante.

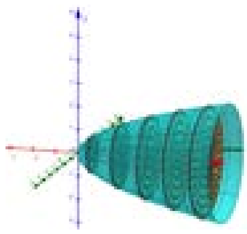
Métodos de cálculo de volúmenes a partir de la integral definida
El estudio del **volumen de los sólidos de revolución** constituye una de las aplicaciones más formativas y estéticamente significativas del cálculo integral. En ella confluyen tres dimensiones del pensamiento matemático: la comprensión conceptual del límite, la representación geométrica del cambio y la formalización simbólica de la integral. Diversos autores han coincidido en que este tema marca un punto de inflexión en el aprendizaje del cálculo, al permitir que el estudiante vea cómo una forma bidimensional se transforma en una figura tridimensional mediante un movimiento continuo (Stewart, 2021; Tall, 1993).

La visión geométrica: Stewart y la intuición del cambio
James Stewart (2021) considera que el estudio de los sólidos de revolución es el ejemplo más claro del poder del cálculo para describir procesos de acumulación. Según él, la idea central no radica únicamente en "calcular" un volumen, sino en comprender cómo una función genera espacio. Stewart propone imaginar la región bajo una curva que gira infinitesimalmente, creando capas que, al sumarse, dan forma al sólido.

La noción de sólido de revolución hunde sus raíces en la geometría clásica. Cavalieri formuló en el siglo XVII su *Principio de los indivisibles*, según el cual dos cuerpos que poseen igual área en todas sus secciones paralelas tienen el mismo volumen (Katz, 2009). Este principio anticipa el concepto de integración: medir un volumen como la suma de infinitas secciones elementales. El cálculo integral transformó este principio en un procedimiento analítico riguroso, al reemplazar los "indivisibles" por límites de sumas infinitesimales.

Posteriormente, Newton y Leibniz formalizaron la integral como el límite de una suma de elementos infinitamente pequeños, permitiendo deducir fórmulas precisas para los volúmenes de sólidos generados por revolución. Así, la geometría del siglo XVII dio paso al pensamiento analítico moderno, donde las formas se conciben como procesos continuos de generación. El principio básico que subyace al volumen de revolución consiste en dividir una figura en secciones infinitesimales (Figura 23), calcular el volumen de cada una y sumar todas esas partes.

Figura 23.
Cálculo de Volumen al rotar una región plana en el Eje x



Nota: Elaboración propia.

Así, la integral $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$,representa el límite de la suma

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \, \Delta x$$

donde $[f(x_i)]^2$ expresa el área del disco en la posición x_i. Este razonamiento traduce la continuidad geométrica en una acumulación analítica.

Apostol (1967) señala que esta estructura es la esencia del cálculo: convertir el movimiento en una secuencia de estados infinitesimales cuya suma expresa una magnitud total.

Desde una perspectiva geométrica, la rotación de una región plana alrededor de un eje genera un volumen que puede interpretarse como el recorrido de un área que se desplaza en el espacio. Esta concepción fue desarrollada por Cavalieri en el siglo XVII, antes de la formalización del cálculo, mediante su principio de los indivisibles, según el cual los cuerpos que tienen igual área en todas las secciones paralelas poseen el mismo volumen.

Método de los discos

El método de los discos se aplica cuando una región limitada por una función $y = f(x)$gira alrededor del eje x. Cada diferencial infinitesimal dx produce un disco circular de radio $f(x)$ y espesor infinitesimal, de modo que el volumen total es la suma (integral) de todas las secciones:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Cuando se aplica el cálculo integral, ese principio se convierte en una herramienta rigurosa. Cada sección transversal del sólido (un círculo o un anillo) constituye una "capa" que, al integrarse, forma el volumen total. Como explica Blitzer (2018), el método de los discos es una forma moderna del principio de Cavalieri: en lugar de comparar secciones, se acumulan infinitos cortes de área infinitesimal.

Desde una perspectiva educativa, el estudio de los sólidos de revolución constituye una oportunidad para integrar las representaciones múltiples del conocimiento matemático: visual, simbólica y analítica (Duval, 2006). El uso de herramientas digitales como GeoGebra, Desmos 3D o Maple, permite a los estudiantes observar de manera dinámica cómo una región bidimensional se transforma en un sólido tridimensional al rotarse.

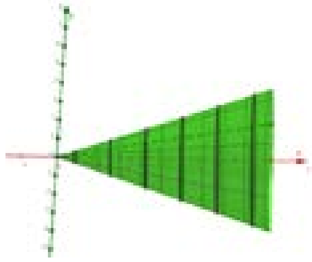
Tall (1993) sostiene que este tipo de visualización favorece la "encapsulación de procesos", es decir, el paso del razonamiento operativo (girar, acumular, sumar) a la comprensión estructural (el volumen como objeto matemático). Este cambio cognitivo es esencial para el desarrollo del pensamiento analítico y la comprensión profunda del cálculo.

La visualización del sólido transparente con secciones discretas (como la que se muestra en la imagen) permite interpretar la integral como un proceso físico de construcción del volumen: cada disco simboliza un estado instantáneo de la función al girar, y la totalidad del cuerpo representa la integración del movimiento.

Este método visualiza el volumen como la acumulación de discos compactos. Según Blitzer (2018), esta concepción convierte la abstracción algebraica de la integral en una experiencia geométrica tangible: cada disco representa una capa de realidad que, al sumarse, configura el cuerpo entero.

Ejemplo 28:

Figura 24.
Cálculo de Volumen al rotar una región plana en el Eje X



Nota: Elaboración propia.

Si la función generadora es $f(x) = \frac{x}{3}$ en el intervalo [0,6] , su revolución alrededor del eje x produce un cono con radio $r = 2$ y altura $h = 6$ (Figura 24).

El volumen se obtiene mediante:

$$V = \pi \int_0^6 \left(\frac{x}{3}\right)^2 dx = \frac{\pi}{9} \int_0^6 x^2\, dx = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{6^3}{3} = 8\pi$$

El resultado coincide con la fórmula clásica del volumen del cono,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 8\pi$$

lo que confirma la coherencia entre el enfoque geométrico y el analítico. Esta correspondencia entre teoría y visualización refuerza la comprensión de la integral como herramienta de medida del cambio acumulativo.

Método de los anillos o lavadoras

Cuando el área está comprendida entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, con $f(x) \geq g(x)$, el giro alrededor del eje x produce un sólido hueco. Cada corte transversal tiene forma de anillo (o lavadora), y su volumen se obtiene como la diferencia de dos discos:

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$

De acuerdo con Stewart (2021), este método muestra una idea esencial del pensamiento matemático: medir no solo lo que está presente, sino también lo que está ausente, pues incluso el vacío tiene una estructura geométrica.

Ejemplo 29: Si $f(x) = 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, en el intervalo [0,4] , el sólido formado presenta un vacío central. El volumen será:

$$V = \pi \int_0^4 (4 - x) dx = 8\pi$$

Así, el cálculo revela una simetría conceptual: tanto un cuerpo macizo como uno hueco pueden tener el mismo volumen, dependiendo de su forma y límites de integración.

Método de los cascarones cilíndricos

El método de los cascarones cilíndricos se utiliza cuando la rotación se realiza alrededor del eje y o cuando se desea trabajar con funciones expresadas como $y = f(y)$. En este caso, cada rectángulo genera un cilindro delgado cuya superficie lateral tiene longitud $2\pi x$ y altura $f(x)$.

El volumen total se expresa como:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

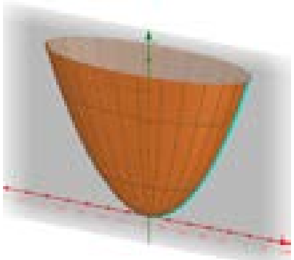
Larson y Edwards (2022) destacan que este método resulta especialmente intuitivo porque muestra el volumen como una envoltura progresiva de capas cilíndricas, lo que facilita la comprensión del crecimiento radial.

Ejemplo 30: Sea $y = x^2$ en [0,1], rotada alrededor del eje y (Figura 25).

Entonces:

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^2) dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx = \frac{\pi}{2}$$

Figura 25.
Cálculo de Volumen al rotar una región plana en el Eje Y



Nota: Elaboración propia.

Este método permite observar el volumen como un proceso de expansión radial, lo que resulta particularmente útil al modelar fenómenos en física o ingeniería, como la distribución de masa o la generación de flujos.

El estudio de los tres métodos ofrece más que una herramienta de cálculo: constituye un modelo de pensamiento visual y analítico. Duval (2006) explica que la comprensión matemática profunda depende de la capacidad para cambiar de registro de representación, es decir, pasar de la expresión simbólica a la visual, de la fórmula al movimiento.

Cuando el estudiante utiliza software como GeoGebra 3D, puede observar el proceso de rotación, identificar las secciones infinitesimales y comprender cómo el cálculo integral traduce el movimiento continuo en una magnitud cuantificable.

Artigue (2009) añade que la enseñanza del cálculo debe vincular la formalización con la exploración geométrica: antes de memorizar fórmulas, el estudiante debe experimentar la formación del volumen, sentir la transformación del plano al espacio. Este enfoque experimental potencia la visualización del cambio y fortalece el pensamiento geométrico.

Los métodos de discos, anillos y cascarones no son simples procedimientos técnicos; representan tres miradas complementarias sobre la relación entre forma, movimiento y medida. La integral actúa como un lenguaje universal que describe cómo el espacio se genera a partir del cambio continuo.

Como afirma Stewart (2021), "el cálculo enseña a pensar en procesos, no en objetos; en transformaciones, no en estados". Esta perspectiva hace del cálculo integral una herramienta no solo para medir volúmenes, sino para comprender la geometría dinámica del mundo.

Conclusiones

El estudio de la integral revela la belleza del cálculo como una ciencia del equilibrio entre el cambio y la permanencia. Comprender la integral no es solo dominar técnicas de antiderivación o cálculo de áreas, sino descubrir cómo los procesos de acumulación describen la continuidad del mundo. A lo largo del capítulo se mostró que la integral expresa el retorno a la totalidad: permite reconstruir, a partir de lo infinitesimal, los comportamientos globales de un fenómeno. Esta idea, presente desde Arquímedes hasta los desarrollos modernos, conecta la geometría, la física y la economía, mostrando que la suma infinita es una forma de razonamiento sobre la vida misma, donde cada pequeña parte contribuye a un todo coherente. La integral se convierte así en una herramienta para interpretar, modelar y anticipar la dinámica de la naturaleza y de los sistemas humanos, reafirmando el sentido formativo y universal del cálculo.

Desde una perspectiva didáctica, este capítulo invita a enseñar la integral desde la experiencia visual y el razonamiento progresivo. La comprensión emerge cuando el estudiante ve cómo las áreas se forman, cómo las magnitudes se acumulan o cómo el cambio puede revertirse en estabilidad. Las herramientas tecnológicas y los contextos reales potencian esta comprensión, al permitir observar que la integral no es una operación mecánica, sino un lenguaje del crecimiento y la reconstrucción. En definitiva, aprender a integrar es aprender a mirar el mundo como una totalidad en movimiento, donde cada instante, por pequeño que parezca, contribuye a la forma final de los procesos que nos rodean.

Referencias

Apostol, T. M. (1967). Calculus (Vol. 1): One-variable calculus with an introduction to linear algebra. Wiley.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Ed.), Nordic research in mathematics education: Proceedings from NORMA08 (pp. 5–16). Brill | Sense. https://doi.org/10.1163/9789087907839_003

Blitzer, R. (2018). Calculus for business, economics, life sciences, and social sciences (14.ª ed.). Pearson.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. (2011). A history of mathematics (3rd ed.). Wiley.

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2005). Fundamental methods of mathematical economics (4th ed.). McGraw-Hill.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations. Springer.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education: China lectures. Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Didáctica de las matemáticas para la enseñanza secundaria. Síntesis.

Katz, V. J. (2009). A history of mathematics: An introduction (3rd ed.). Pearson.

Kline, M. (1990). Mathematical thought from ancient to modern times (Vol. 1). Oxford University Press.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2022). Cálculo: Trascendentes tempranas (10.ª ed.). Cengage Learning.

Leithold, L. (1998). El cálculo con geometría analítica (6.ª ed.). Oxford University Press.

Merton, R. C. (1990). Continuous-time finance. Blackwell.

Nicholson, W., & Snyder, C. (2018). Microeconomic theory: Basic principles and extensions (12th ed.). Cengage Learning.

Stewart, J. (2021). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (9.ª ed.). Cengage Learning.

Strang, G. (2019). Calculus. Wellesley-Cambridge Press.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 281–288). Springer.

Tall, D. (2013). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press.

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2024). Thomas' calculus: Early transcendentals (15th ed.). Pearson.

Varian, H. R. (2019). Intermediate microeconomics: A modern approach (9th ed.). W. W. Norton & Company.

Capítulo IV

Didáctica del cálculo y modelación del cambio

Introducción

Enseñar cálculo supone mucho más que transmitir un conjunto de técnicas; implica abrir una forma de mirar el mundo en términos de variación, continuidad y transformación. Desde esta perspectiva, el cálculo se convierte en una herramienta para comprender la realidad y no solo para resolver problemas. Sin embargo, el reto pedagógico no reside en la complejidad del contenido, sino en la manera en que este se representa, se experimenta y se internaliza. La didáctica del cálculo busca, por tanto, que el estudiante construya significados antes que procedimientos, que vea en una curva o en un límite no una abstracción lejana, sino la expresión visible del cambio en los fenómenos que lo rodean.

Comprender el cálculo desde una mirada conceptual y visual demanda una enseñanza que combine lo simbólico con lo intuitivo. Los símbolos, las gráficas y las palabras se transforman en tres lenguajes complementarios del pensamiento variacional, y el

ISBN 978-9942-596-13-0 | 2025
https://editorial.risei.org

aula se convierte en un laboratorio donde el estudiante explora, conjetura y modela. En este sentido, la representación múltiple del cambio constituye el eje articulador de un aprendizaje significativo. Cuando una función cobra vida en la pantalla, cuando el estudiante manipula parámetros y observa cómo se transforma la gráfica, el cálculo deja de ser una técnica abstracta para convertirse en una experiencia cognitiva y estética.

Desde la didáctica contemporánea, enseñar derivadas e integrales requiere articular la intuición, el lenguaje simbólico y el pensamiento computacional. GeoGebra, Desmos y Python se han consolidado como entornos que amplifican la capacidad de exploración y visualización del estudiante, permitiéndole descubrir regularidades y formular hipótesis sobre la variación. Estos entornos no reemplazan la comprensión teórica, sino que la potencian: facilitan el tránsito del cálculo manual al razonamiento estructural, del resultado al proceso. A su vez, la modelación matemática se erige como una estrategia central para dotar de sentido a los conceptos, al conectar el aula con fenómenos reales de la física, la economía o la biología.

Finalmente, este capítulo propone un enfoque didáctico que integra la comprensión conceptual con la tecnología y la reflexión pedagógica. La enseñanza del cálculo debe conducir al desarrollo del pensamiento variacional, entendido como la capacidad de reconocer y analizar patrones de cambio, y del razonamiento funcional, que permite comprender cómo las variables se relacionan y evolucionan en el tiempo. Formar en cálculo, desde esta visión, significa formar mentes que piensen dinámicamente, que sepan traducir lo cambiante en estructuras comprensibles y que asuman la matemática como una forma profunda de interpretar el mundo.

Enseñar cálculo desde la comprensión conceptual y visual

Enseñar cálculo como teoría del cambio y la acumulación exige algo más que destrezas de cómputo. Implica ayudar a que el estudiantado construya significados estables y transferibles que articulen definiciones, propiedades, representaciones y usos en contextos variados. En esta clave, lo conceptual y lo visual no son dos caminos paralelos. Son un mismo trayecto que se recorre con diferentes recursos cognitivos y semióticos: palabras, símbolos, gráficos, manipulaciones y simulaciones. La investigación en Didáctica de la Matemática coincide en que la coordinación entre registros de representación y la reificación progresiva de procesos en objetos son condiciones para comprender profundamente nociones como límite, derivada e integral (Duval, 2006; Sfard, 1991; Tall, 2013).

Fundamentos teóricos: registros, imágenes de concepto y tránsito proceso–objeto

En cálculo, comprender es poder coordinar definiciones, propiedades y usos a lo largo de varios registros de representación y, además, convertir acciones en objetos. De acuerdo con Duval (2006), el aprendizaje profundo exige conversión entre registros: verbal, gráfico y simbólico. En la práctica, el estudiantado no solo "traduce", sino que verifica que lo visto en la gráfica coincide con lo que la expresión declara y con lo que el enunciado describe. Cuando esta verificación no se busca, suelen consolidarse errores de lectura, por ejemplo, confundir valor de la función con valor límite.

Tall y Vinner (1981)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

distinguen entre imagen de concepto y definición de concepto. En el límite, la imagen de concepto típica asocia "acercarse" con "sustituir", lo que oculta la diferencia entre y $f(a)$. Por eso conviene diseñar secuencias que hagan visible el desacople: funciones con "agujeros", saltos o redefiniciones puntuales que mantengan el límite, pero cambien el valor de la función. El contraste explícito entre imagen y definición es una estrategia de reducción de malentendidos persistentes (Cornu, 1991).

El tránsito cognitivo de procesos a objetos es clave.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sfard (1991) lo denomina reificación y Gray y Tall (1994) hablan de procepto para subrayar que expresiones como $f'(a)$ o son a la vez un procedimiento y un objeto con propiedades. Cuando la enseñanza se queda en el plano procedimental, la derivada se reduce a reglas y la integral a antiderivación mecánica.

Finalmente, el marco de los tres mundos del pensamiento de Tall (2013) ayuda a orquestar la progresión: lo corporal (intuiciones de cambio y cercanía en experiencias y simulaciones), lo simbólico-proceptual (operaciones con expresiones que se tratan como objetos) y lo axiomático-formal (definiciones y teoremas). La planificación equilibra estos mundos: primero se "ve" y se "dice", luego se "simboliza" y se "justifica", y más tarde se "depura" con formalización apropiada al nivel.

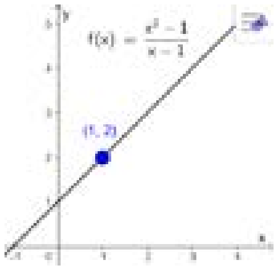
Ejemplo 1: Se muestra $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ y se pide (Figura 1):

a) Estimar con una gráfica $\lim_{x \to 1} f(x)$.

b) Redefinir $f(1)$ y explicar por qué el límite no cambia

c) Escribir una explicación breve que use el lenguaje de "cercanías" y contraste con la definición formal. La consigna obliga a coordinar registros y a diferenciar imagen y definición.

Figura 1.
Cálculo de límite de $f(x)$ en el punto $x = 1$



Nota: Elaboración propia.

El límite y la derivada desde la visualización local: razón que se estabiliza y linealización

La derivada se consolida cuando confluyen tres hilos: razón de cambio, pendiente y linealización local. Zandieh (2000) propone un marco de capas: razón incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

paso al límite y coordinación multirregistro. Estas capas se pueden visualizar con secuencias que acerquen rectas secantes a la tangente, que muestren tasas promedio sobre intervalos decrecientes y que pidan conjeturas antes del cálculo exacto.

Ejemplo 2: Dada $s(t)$ definida por (Figura 2):

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

a) Estimar con tabla y gráfica la tasa promedio en $[1, 1+h]$ para $h > 0$ y $h < 0$.

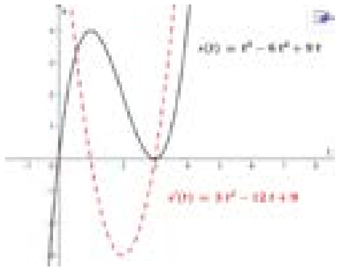
b) Observar la estabilización numérica al disminuir $|h|$.

c) Calcular $s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ y justificar que $s'(1) = 0$ expresa una pendiente nula y una linealización plana:

$$s(t) \approx s(1) + s'(1)(t - 1)$$

d) Superponer s y s' y narrar, en lenguaje común, dónde crece y decrece la función y por qué.

Figura 2.
Comprensión de localidad del análisis



Nota: Elaboración propia.

El punto teórico no es "ver para creer", sino ver para conjeturar y luego justificar. La visualización apoya la comprensión de la localidad del análisis: el comportamiento global puede engañar, pero al "hacer zoom" la tangente impone una lectura lineal. Este paso conecta con la noción de diferenciabilidad y prepara la formalización con ε y δ como control del error entre función y su aproximación lineal en un entorno (Tall, 2013).

Riesgos y mitigaciones.

- **Riesgo:** Sobreconfiar en lo que "parece" en una pantalla. Mitigación: pedir una verificación simbólica mínima y una explicación escrita que use el vocabulario de razón que se estabiliza.
- **Riesgo:** Tratar la linealización como fórmula. Mitigación: exigir siempre el relato local: qué cambia, qué permanece invariante y por qué la recta tangente "gobierna" en el entorno.

La integral definida como acumulación: áreas firmadas, funciones acumuladas y Teorema Fundamental

La integral definida debe instalarse primero como acumulación y área firmada, no como "antiderivación al revés". Se parte de una tasa $\mathrm{r(t)}$ significativa, se aproximan acumulaciones con sumas de Riemann y se construye la función acumulada

$$\mathrm{A(t)} = \int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} \mathrm{r(u)du}$$

El paso decisivo es leer $\mathrm{A'(t)} = \mathrm{r(t)}$ como una relación estructural y no como un truco de cálculo. Así, el Teorema Fundamental del Cálculo une dos narrativas: leer pendientes (derivada) y leer áreas (integral).

Ejemplo 3: El caudal instantáneo con que entra agua a un tanque está dado por $\mathrm{r(t)} = 2 + \mathrm{sen(t)}$ (litros/minuto) durante $0 \leq \mathrm{t} \leq \pi$ minutos.

a) Estimar
$$\int_0^{\pi} \mathrm{r(t)dt}$$
con rectángulos izquierdos, derechos y de punto medio, variando el número de subintervalos.

b) Graficar
$$\mathrm{A(t)} = \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{r(u)du}$$
y observar su crecimiento, sus concavidades y sus puntos donde $\mathrm{A}'(\mathrm{t}) = \mathrm{r}(\mathrm{t})$ se anula.

c) Calcular $\mathbf{A(t) = 2t - cost + 1}$ y comparar con las estimaciones.

d) Discutir el signo como orientación: si $\mathbf{r(t) < 0}$, el "área" resta acumulación.

Desde la teoría de los registros (Duval, 2006), esta secuencia fuerza conversiones controladas y evita dos errores comunes: pensar que toda "área" es positiva y creer que integrar es "aplicar fórmulas". Desde el enfoque proceso-objeto, la integral se convierte en objeto manipulable: se acota, se compara, se compone con funciones y se usa para **modelar** decisiones.

Riesgos y mitigaciones.

- **Riesgo:** Perder el sentido de límite al pasar de sumas a integral. Mitigación: mantener visible el parámetro "número de subintervalos" y discutir convergencia y error.
- **Riesgo:** Reducir el TFC a recetas. Mitigación: pedir siempre una lectura semántica: qué significa $\mathrm{A}'(\mathrm{t}) = \mathrm{r}(\mathrm{t})$ en el fenómeno.

Diseño didáctico y evaluación: ver, decir, simbolizar y justificar
Las decisiones metodológicas deben sostener la coherencia entre mundos (Tall, 2013) y la coordinación de registros (Duval, 2006). Proponemos un ciclo estable:

1. **Ver:** Apertura con experiencia o simulación que exponga el rasgo conceptual: acercamientos al punto para límite, secantes que se aproximan a la tangente, rectángulos que aproximan acumulación.
2. **Decir:** Formulación de conjeturas en lenguaje natural. Se exige vocabulario de proximidad, tasa, acumulación, orientación.
3. **Simbolizar:** Traducción a expresiones y procedimientos, con control metacognitivo sobre la elección de técnicas.
4. **Justificar:** Argumentación proporcional al nivel: desde equivalencias numéricas y desigualdades elementales hasta argumentos $\varepsilon - \delta$ en casos prototípicos.

El valor pedagógico de GeoGebra, Desmos u otras herramientas no está en la animación por sí misma, sino en cómo hacen visible la idea que queremos discutir y en cómo obligan a argumentar lo observado. La tecnología debe estar al servicio de tres acciones cognitivas: variar, comparar y justificar. Esta triada conecta con el rol representacional de la tecnología descrito por Kaput, que subraya su potencia para vincular la matemática con experiencias auténticas y manipulables (Kaput, 1994). Además, las herramientas dinámicas facilitan la coordinación de registros que demanda la comprensión, tal como lo plantea la teoría semiótica de Duval (2006), y permiten moverse entre los mundos corporal, simbólico y formal de Tall (2013) con mayor fluidez.

Cómo orquestar una exploración tecnológica paso a paso

1. **Foco conceptual explícito:** Antes de abrir la aplicación, enuncia el propósito con una frase corta: "Hoy vamos a mirar cómo una razón promedio se estabiliza cuando el intervalo se hace pequeño".Este enunciado ancla la observación a un objeto conceptual y evita la navegación sin rumbo.
2. **Variación controlada:** Introduce uno o dos deslizadores pertinentes. Ejemplos:

- **En límites:** Punto a y ancho del intervalo h.
- **En derivada:** Posición x y separación Δx de la secante.
- **En integral:** Número de subintervalos n y punto de muestreo.

La variación controlada permite ver qué cambia y qué permanece invariante, idea central en la construcción de significado (Tall, 2013).

3. **Comparaciones visibles:** Superpone representaciones que dialoguen: la curva f, su secante y la tangente; o la tasa r(t) y la función acumulada $A(t)$. Pide al estudiantado capturas de pantalla anotadas con flechas y breves etiquetas. Las anotaciones fuerzan la verbalización de lo que se ve, tal como recomienda Arcavi sobre el papel de lo visual para pensar matemáticamente (Arcavi, 2003).
4. **Preguntas guía que conducen a la justificación:**

- "¿Qué observas cuando $|h|$ se hace menor que 0?1, 0.01, 0.001?"
- "Si la secante ya casi coincide con la tangente, ¿qué afirmación simbólica respalda esta observación?"
- "En la gráfica de $A(t)$, ¿en qué puntos deja de crecer y cómo se ve eso en $r(t)$?"

Estas preguntas enseñan a "leer" el gráfico con un propósito y conectarlo con el registro simbólico y verbal (Duval, 2006).

5. **Verificación cruzada obligatoria:** Cada producto tecnológico se acompaña de dos piezas breves:

a) Cálculo esencial que verifica una conjetura.
b) Párrafo interpretativo de 6 a 8 líneas.

La verificación cruzada reduce el riesgo de sobre interpretar lo que "parece" y promueve el control metacognitivo sobre el procedimiento elegido (Hiebert & Carpenter, 1992).

6. **Cierre que sube de nivel:** Conecta lo observado con la idea formal correspondiente: por ejemplo, desde la estabilización de razones a la definición de derivada como límite, o desde sumas de Riemann al enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo. Este puente consolida el tránsito del mundo corporal al simbólico y prepara la depuración formal (Tall, 2013).

Buenas prácticas concretas

- Un deslizador por idea clave. Demasiados controles confunden.
- Capturas con comentarios. Sin comentario, la imagen no evidencia comprensión.
- Tiempo acotado para explorar y más tiempo para explicar. Explorar 10 minutos, explicar y justificar 20.
- Alternar conductor. Un momento lo guía la docencia, otro lo conduce un equipo que explica sus hallazgos a la clase.

Riesgos comunes y cómo mitigarlos

- *Efecto espectáculo.* Mucho movimiento y poca matemática. Solución: comenzar cada exploración con una pregunta matemática que luego deba contestarse por escrito.
- *Dependencia del gráfico.* Si la resolución engaña, la conclusión puede ser falsa. Solución: cotejar con valores numéricos y una desigualdad o identidad clave.
- *Procedimentalismo digital.* Pulsar botones sin sentido. Solución: exigir que cada clic tenga un porqué expuesto en la ficha de trabajo.

Rúbricas y evaluación formativa: evaluar conexiones, no solo resultados

La evaluación debe valorar la calidad de las conexiones entre registros, la claridad del relato conceptual y el control del error, por encima de la extensión del cálculo rutinario. Este enfoque está en correspondencia con la necesidad de traducir y coordinar registros que plantea Duval (Duval, 2006).

1. **Conexión multirregistro**

La conexión multirregistro se refiere a la capacidad que tienen los estudiantes para relacionar distintos modos de representar una idea matemática, como gráficos, símbolos y lenguaje verbal. Cuando esta habilidad está muy desarrollada, el estudiante puede pasar de un registro a otro con soltura, explicar qué aspectos cambian y cuáles permanecen constantes ante una variación y, además, detectar incoherencias si las hubiera. (Tabla 1)

En un nivel sólido, el estudiante ya consigue coordinar al menos dos registros y reconocer algún elemento invariante, aunque su análisis es menos profundo. En cambio, cuando la habilidad está en desarrollo, suele usar solo uno o dos registros sin integrarlos entre sí y su explicación se queda en lo descriptivo, sin llegar a establecer relaciones que le permitan interpretar de manera más completa la situación matemática.

Tabla 1.
Conexión multirregistro

Nivel	**Descripción mejorada**	**Indicadores observables**
Excelente	Integra con consistencia gráfico, simbólico y verbal. Explica qué cambia y qué permanece invariante al variar un parámetro y verifica en ambos sentidos.	Identifica invariantes; distingue valor vs límite, razón promedio vs derivada, área firmada vs área geométrica; detecta contradicciones entre registros.
Sólido	Coordina al menos dos registros con coherencia y nombra al menos un invariante relevante.	Traduce de gráfica a símbolo o de símbolo a relato sin errores sustantivos; usa vocabulario preciso.
En desarrollo	Usa uno o dos registros sin traducir entre ellos; explicación descriptiva pero no relacional.	Lectura literal de la gráfica; confunde pendiente con altura; no contrasta.
Inicial	Presenta un único registro y comete confusiones de base.	Igualación de límite y valor; trata toda área como positiva; ausencia de verificación.

Nota: Elaboración propia.

2. Relato conceptual

El relato conceptual (Tabla 2) describe la manera en que un estudiante logra expresar con sus propias palabras la idea matemática central de un tema, mostrando que entiende no solo su definición, sino también su contexto, sus alcances y sus límites. En un nivel excelente, el estudiante explica el concepto con claridad, utiliza terminología precisa y es capaz de ofrecer ejemplos y contraejemplos que demuestran un dominio profundo.

Cuando el nivel es sólido, la explicación sigue siendo correcta y clara, aunque con menor riqueza conceptual. En cambio, cuando la habilidad está en desarrollo, el estudiante suele limitarse a repetir definiciones ligeramente reformuladas, sin vincularlas a la situación que analiza. Finalmente, en el nivel inicial, el discurso se reduce a fórmulas o frases memorizadas sin comprensión real, lo que se evidencia en la falta de contexto, la ausencia de interpretación y un lenguaje casi telegráfico.

Tabla 2.
Relato conceptual

Nivel	Descripción mejorada	Indicadores observables
Excelente	Define con sus palabras el foco conceptual, lo sitúa en contexto y muestra alcances y límites con ejemplo y contraejemplo correctos.	Uso de términos como entorno, cercanía, estabilización, linealización, acumulación, orientación del área; precisión semántica.
Sólido	Explica con claridad el foco y lo ilustra con un ejemplo correcto.	Terminología casi sin ambigüedades; coherencia entre enunciado y ejemplo.
En desarrollo	Parafrasea definiciones sin aplicarlas a la situación dada.	Mezcla de términos o ausencia de contexto; definiciones genéricas.
Inicial	Repite fórmulas sin sentido conceptual.	No explicita condiciones ni interpretaciones; lenguaje telegráfico.

Nota: Elaboración propia.

3. Uso pertinente de tecnología

El uso pertinente de la tecnología (Tabla 3) se refiere a la capacidad del estudiante para elegir y manejar herramientas digitales de manera que aporten sentido al razonamiento matemático. En un nivel excelente, el estudiante selecciona la aplicación adecuada para el objetivo conceptual, ajusta con intención los deslizadores o capas que necesita y acompaña cada interacción con cálculos o anotaciones que permiten entender qué observa y por qué es relevante.

Cuando el nivel es sólido, la herramienta se utiliza de forma coherente con el propósito y al menos se incluye una explicación básica que conecta la visualización con la idea matemática. En los niveles en desarrollo, las capturas o acciones suelen centrarse más en el aspecto visual que en el concepto, mostrando una relación débil con el cálculo o con el análisis que se pretende realizar. Finalmente, en el nivel inicial se observa un uso desordenado y sin propósito matemático, con clics aleatorios, escalas mal ajustadas y resultados que no pueden vincularse con ninguna conclusión clara.

Tabla 3.
Uso de tecnología

Nivel	Descripción mejorada	Indicadores observables
Excelente	Selecciona la herramienta por propósito conceptual; configura variación controlada y superposiciones útiles; vincula cada interacción con cálculo verificable y mantiene replicabilidad.	Deslizadores con rangos acotados; capas f, f' y función acumulada; anotaciones que explican lo que se ve y lo que significa.
Sólido	Uso consistente con el objetivo y al menos una anotación explicativa.	Escalas adecuadas; pequeñas inconsistencias que no afectan la conclusión.
En desarrollo	Capturas sin anotación o foco estético; conexión débil con el cálculo.	Interacciones irrelevantes o excesivas; cambios de escala no justificados.
Inicial	Clics aleatorios sin propósito matemático; errores de escala no reconocidos.	No hay trazabilidad del gráfico a la conclusión; confusiones persistentes.

Nota: Elaboración propia.

4. Control del error y de supuestos

El control del error y de los supuestos (Tabla 4) muestra hasta qué punto un estudiante es capaz de reconocer las limitaciones de sus procedimientos y justificar la fiabilidad de sus resultados. En el nivel excelente, el estudiante no solo identifica el error de aproximación, sino que lo estima o lo acota, compara distintas aproximaciones para valorar su convergencia y explica por qué el método utilizado es adecuado, dejando claros los supuestos que lo sustentan.

En un nivel sólido, el análisis es más básico, pero aun así reconoce dónde se produce el error y compara al menos dos aproximaciones, aunque no llegue a cuantificar una cota precisa. Cuando la habilidad está en desarrollo, el estudiante sabe que existe un error, pero no lo analiza ni lo contrasta, lo que se refleja en decisiones instrumentales tomadas sin un criterio claro. Finalmente, en el nivel inicial se asume que todo es exacto o simplemente se omite la discusión sobre errores y supuestos, lo que conduce a presentar resultados sin análisis crítico.

Tabla 4.
Control del error y supuestos

Nivel	Descripción mejorada	Indicadores observables
Excelente	Estima o acota el error de aproximación, compara tasas de convergencia, justifica el método y explicita supuestos del modelo.	Tabla n vs aproximación y error; identifica sobre o subestimación; criterios para elegir regla de Riemann o método.
Sólido	Reconoce el error y compara al menos dos aproximaciones.	Señala cuál sobrestima o subestima y por qué, aun sin cuantificar cota.
En desarrollo	Admite que hay error pero no lo cuantifica ni lo compara.	Elecciones instrumentales sin criterio; ausencia de análisis de calidad.
Inicial	Asume exactitud o ignora el tema.	No revisa supuestos; presenta resultados sin discusión.

Nota: Elaboración propia.

Representaciones simbólicas, gráficas y verbales del cambio

La comprensión del cálculo como lenguaje del cambio exige articular tres registros epistemológicamente complementarios: el simbólico, el gráfico y el verbal. En primer lugar, la literatura ha mostrado que la comprensión profunda no depende de un registro dominante, sino de la conversión sistemática entre registros y de la verificación de coherencia interna entre lo que se ve, lo que se escribe y lo que se explica. Esta tesis se sustenta en la teoría de los registros semióticos de Duval, que identifica la conversión y el tratamiento como operaciones cognitivas indispensables para la constitución del significado matemático (Duval, 2006), y se refuerza con los aportes de Arcavi sobre el papel de las representaciones visuales en la construcción de ideas matemáticas potentes (Arcavi, 2003).

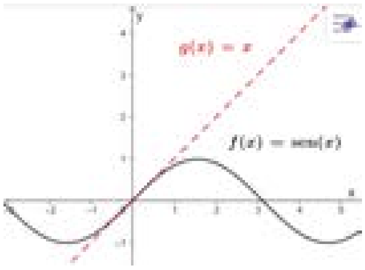
En segundo lugar, desde un plano cognitivo, la imagen de concepto del estudiantado debe formar con la definición de concepto mediante secuencias que hagan explícito el tránsito desde intuiciones locales hacia enunciados formales, evitando confusiones estructurales como igualar límite y valor o leer pendientes como alturas (Tall & Vinner, 1981; Sierpińska, 1994). En tercer lugar, el cambio se aprende como proceso y se estabiliza como objeto: el paso de operar con razones y sumas a operar con derivadas e integrales como entidades manipulables es el núcleo de la reificación conceptual que describen Sfard y Gray y Tall (Sfard, 1991; Gray & Tall, 1994).

Límite y continuidad: traducir cercanía en símbolos, gráficos y palabras

Conviene recordar que un enunciado de límite afirma control de la cercanía y, por tanto, control del error: para todo margen deseado de aproximación en los valores de f(x) alrededor de L, existe un entorno de a que garantiza esa proximidad. Esta semántica de precisión debe ser observable en la gráfica, representable en símbolos y enunciable con un léxico de cercanía, entorno y estabilización. En coherencia con Duval (2006), la actividad de aprendizaje debe orquestar conversiones explícitas: de narrativas verbales a notación y de notación a lectura visual con zoom local. Asimismo, con base en Tall y Vinner (1981), se ha de contrastar la imagen de concepto de límite como "acercarse" con la definición en términos de control del error, para evitar equivalencias espurias.

Ejemplo 4: Caso trigonométrico fundamental. $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1$ (Figura 3)

Figura 3.
Comprensión de estabilización de la razón incremental



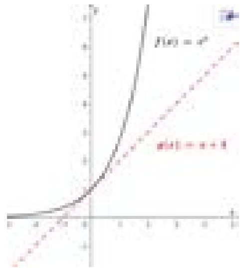
Nota: Elaboración propia.

En el registro gráfico, los acercamientos laterales exhiben que, al reducir el ángulo, arco y cateto opuesto se equiparan a primer orden; la curva $\mathrm{sen}(x)$ se confunde con la recta $y = x$ cerca del origen.

En el registro simbólico, la fórmula condensa la idea de estabilización de la razón incremental. En el registro verbal, se expresa que la razón entre longitud curvilínea y proyección recta se aproxima a 1 para ángulos pequeños. Por consiguiente, se justifica la linealización $\mathrm{sen}\,(x) \approx x$ en vecindades de 0 y se prepara la lectura local de la derivada de $\mathrm{sen}(x)$ (Arcavi, 2003).

Ejemplo 5: Caso exponencial en el origen $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1$

Figura 4.
Linealización de la función exponencial en la cercanía de cero



Nota: Elaboración propia.

En el registro gráfico (Figura 4), la tangente $\mathbf{y = 1 + x}$ aproxima con gran fidelidad $\mathbf{e^x}$ cerca de 0. En el registro simbólico, la resolución de la forma $\frac{0}{0}$ afirma que el crecimiento relativo unitario gobierna el comportamiento local.

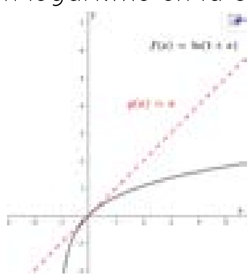
En el registro verbal, se declara que por cada incremento infinitesimal de x el valor de $\mathbf{e^x}$ cambia en magnitud comparable, lo que sugiere $\mathbf{e^x \approx 1 + x}$ en el origen.

Ejemplo 6: Caso logarítmico elemental

$$\left(\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0\right)$$

En la gráfica (Figura 5),el $\mathbf{\ln(1+x)}$ roza a $\mathbf{y = x}$ en el origen; en símbolos, se establece la equivalencia de primer orden; en palabras, se afirma que un pequeño incremento porcentual se traduce en un incremento casi equivalente en el logaritmo. En términos didácticos, este caso vehicula la noción de cambio relativo y prepara el uso de $\mathbf{\ln(1+h) \approx h}$.

Figura 5.
Linealización de la función logaritmo en la cercanía de cero



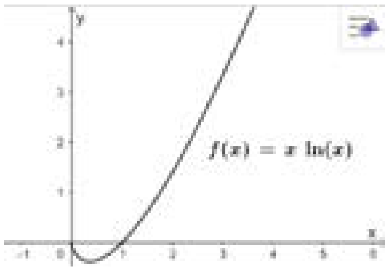
Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 7: Caso de comparación de tasas

$$\left(\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\right)$$

En la gráfica (Figura 6), la curva desciende y se aplana hacia el eje; en símbolos, se desambigua el producto $0 \cdot (-\infty)$ mostrando que la velocidad de aproximación de x a 0 domina la velocidad de decrecimiento de $\mathrm{x} \ln \mathrm{x}$.; en palabras, se enfatiza la lectura comparativa de magnitudes en competencia.

Figura 6.
Cálculo de límite en la comparación de tasas



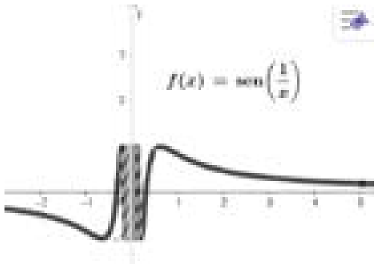
Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 8: Caso de oscilación sin estabilización $\left(\lim_{\mathrm{x} \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)\right)$ no existe.

En la gráfica (Figura 7), el zoom sucesivo revela oscilaciones sin asentamiento; en símbolos, se niega la existencia del límite; en palabras, se explicita que no es posible controlar el error alrededor de ningún candidato.

De este modo, se distribuye imagen de concepto y definición, remarcando que "acercarse" no basta sin estabilización (Sierpińska, 1994;Tall & Vinner, 1981).

Figura 7.
Cálculo de límite de oscilación si estabilización



Nota: Elaboración propia.

En síntesis, estos ejemplos consolidan la semántica del límite como estabilización y habilitan el paso a la derivada, en coherencia con la progresión corporal–simbólico–formal de los tres mundos de Tall (2013).

Derivada y linealización locales: razón que se estabiliza en exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas.
En segundo lugar, se establece que la derivada en a resulta del límite de razones promedio y, simultáneamente, constituye el objeto que permite linealizar el comportamiento local de la función:

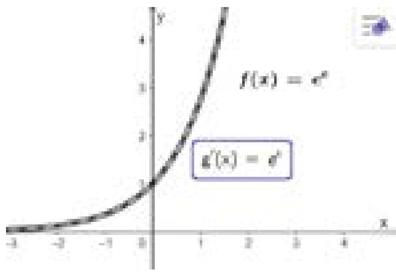
$$\left(f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)\right)$$

De acuerdo con Sfard (1991) y Gray y Tall (1994), el símbolo $(f'(a)$ es proceptual: designa a la vez un proceso y un objeto. Por consiguiente, el aula debe articular una secuencia que haga visibles los tres registros y su coherencia: ver secantes que se transforman en tangente, escribir el límite que captura la estabilización y decir con precisión el sentido local de la recta tangente y su error.

En símbolos, $(e^x)' = e^x$. En gráficas (Figura 8), la pendiente coincide con la altura en cada punto. En palabras, se enuncia que la tasa de cambio es proporcional al valor.

De esta forma, en a se escribe la linealización $L(x) = e^a + e^a(x-a)$

Figura 8.
Cálculo de derivadas donde la pendiente coincide con la altura en cada punto



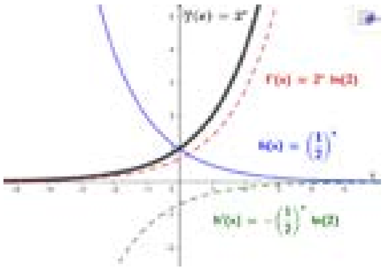
Nota: Elaboración propia.

En términos de lectura local, donde e^x es grande, la función cambia rápidamente, y donde es pequeña, cambia lentamente, lo que da unidad semántica al par altura–pendiente.

Ejemplo 9: Exponencial general y factor regulador ln (a)

En símbolos, $(a^x)' = \ln(a)a^x$. En gráficas (Figura 9), las familias a^x exhiben pendientes más pronunciadas cuanto mayor es $a > 1$, y pendientes negativas si $0 < a < 1$.

Figura 9.
Comportamiento de pendientes en funciones exponenciales



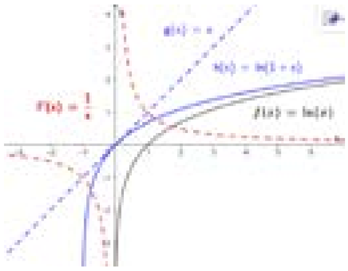
Nota: Elaboración propia.

En palabras, se sostiene que ln(a) regula la rapidez del cambio por unidad de x, integrando la comparación de tasas y el efecto de un parámetro.

Ejemplo 10: Logaritmo natural y desaceleración

En símbolos, $(\ln(\mathrm{x}))' = \frac{1}{\mathrm{x}}$. En gráficas, la curva presenta pendientes muy altas cerca de 0 que se suavizan al crecer x (Figura 10).

Figura 10.
Comportamiento de la desaceleración del logaritmo



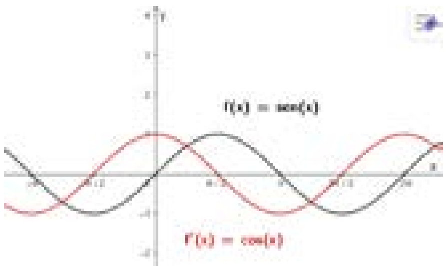
Nota: Elaboración propia.

En palabras, se explicita que la ganancia marginal decrece, lo que permite traducir la pendiente en razonamientos sobre elasticidad y sensibilidad. En $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, la linealización $\ln(1+\mathrm{h}) \approx \mathrm{h}$ hace tangible el nexo entre derivada y aproximación local.

Ejemplo 11: Trigonométricas y desfasaje ritmo-posición

En símbolos, $(\mathrm{sen}(\mathrm{x}))' = \cos(\mathrm{x})$ y $(\cos(\mathrm{x}))' = -\mathrm{sen}(\mathrm{x})$. En gráficas, la sinusoide exhibe ritmo máximo en los cruces con el eje y ritmo nulo en cimas y valles (Figura 11).

Figura 11.
Comportamiento de desfasaje ritmo – posición en funciones trigonométricas



Nota: Elaboración propia.

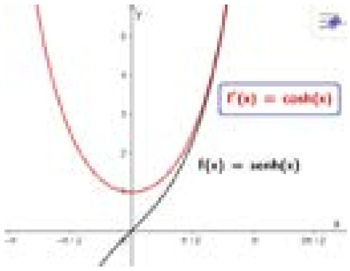
En palabras, se interpreta el desfase de un cuarto de ciclo entre posición y velocidad, habilitando una lectura cualitativa de crecimiento, decrecimiento y extremos mediante el signo de la derivada.

Ejemplo 12: Hiperbólicas y curvatura global

En símbolos,$(\mathrm{senh}\,(\mathrm{x}))' = \cosh\,(\mathrm{x})\mathrm{y}(\cosh\,(\mathrm{x}))' = \mathrm{senh}\,(\mathrm{x})$.

En gráficas, $\cosh(\mathrm{x})$ es convexa con mínimo en 0, mientras se $\mathrm{senh}(\mathrm{x})$ es impar y casi lineal en vecindades del origen (Figura 12).

Figura 12.
Comportamiento de funciones hiperbólicas



Nota: Elaboración propia.

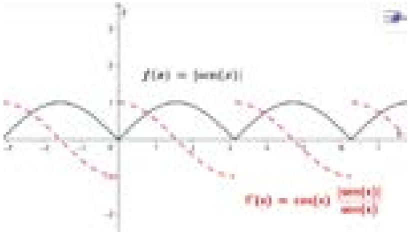
En palabras, se establece que la catenaria $\cosh(\mathrm{x})$ se curva hacia arriba en todo punto, lo cual refuerza la lectura del signo de la segunda derivada como diagnóstico de concavidad.

Ejemplo 13: No *diferenciabilidad en trascendentes con cúspides*

Comportamiento de no diferenciabilidad en funciones con cúspides

En símbolos, $\mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = |\mathrm{sen}\,(\mathrm{x})|$ no es diferenciable en $\mathrm{x} = \mathrm{k}\pi$ (figura 13). En gráficas, aparecen cúspides; en palabras, se explica que los cocientes incrementales laterales no convergen a un valor común (Figura 13). Desde un plano didáctico, se evita aplicar reglas de derivación sin analizar comportamiento local.

Figura 13.
Gráfico de la Función Seno en Valor Absoluto y su Función Derivada

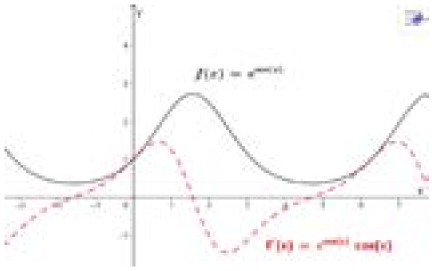


Nota: Elaboración propia.

Ejemplo 14: Composición trascendente y lectura en cadenas

Para $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{e}^{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$ en símbolos $\mathbf{F}'\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{cos}\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{e}^{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$. En gráficas, es útil superponer F con $\mathbf{sen(x)}$ y $\mathbf{cos(x)}$ para leer zonas de máximo crecimiento cuando $\mathbf{cos(x)} > \mathbf{0}$ y $\mathbf{sen(x)}$ es grande. (Figura 14)

Figura 14.
Comportamiento de composición de funciones trascendente



Nota: Elaboración propia.

En palabras, se declara que la tasa combina el efecto del valor de F con la orientación del factor $\mathbf{cos(x)}$, lo que integra lectura local y composición.

A modo de conclusión, la derivada se instala como razón que se estabiliza y como operador de linealización. Ello requiere explicitar, para cada ejemplo, un número de verificación, una figura con tangente y un enunciado verbal con términos controlados, con el fin de sincronizar acción simbólica, evidencia visual y argumentación metacognitiva (Zandieh, 2000; Gray & Tall, 1994).

Integral definida y acumulación orientada: del rectángulo a la estructura tasa–acumulación

La integral definida modela acumulación con orientación como límite de sumas de Riemann. Si se define $\mathbf{A}\left(\mathbf{t}\right) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} \mathbf{f}\left(\mathbf{u}\right)\mathbf{du}$, entonces $\mathbf{A}'\left(\mathbf{t}\right) = \mathbf{r}\left(\mathbf{t}\right)$, hecho que instituye el vínculo entre cambio instantáneo y saldo acumulado. Desde la perspectiva de Duval (2006), esta relación debe ser leída y traducida en los tres registros: el gráfico que muestra rectángulos y firma el signo del área, el simbólico que estabiliza la suma en el límite y el verbal que nombra de forma precisa qué se acumula, con qué orientación y bajo qué supuestos. Con base en Tall (2013), se asume que el significado no depende de disponer de antiderivadas cerradas, sino de comprender la estructura tasa–acumulación.

Acumulación exponencial

En símbolos,

$$\mathrm{A}\left(\mathrm{t}\right)=\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\mathrm{du}=\mathrm{e}^{\mathrm{t}}-1\mathrm{y}\mathrm{A}'\left(\mathrm{t}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{t}}$$

En gráficas, A replica la forma de e^tpero arranca en 0. En palabras, se afirma que la acumulación crece a la misma tasa que la función de entrada, lo cual hace visible el Teorema Fundamental del Cálculo como puente entre lectura de pendientes y lectura de áreas.

Logaritmo como área bajo 1/x

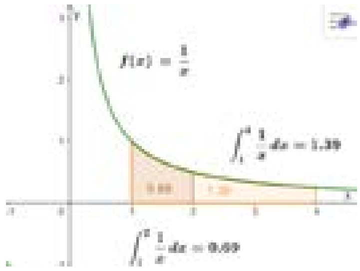
En símbolos,

$$\int_1^{\mathrm{b}} \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}=\ln\left(\mathrm{b}\right)$$

para $\mathrm{b}>0$. En gráficas, el área firmada bajo 1/x crece lentamente (Figura 15).

Figura 15.

Comportamiento de la semántica multiplicativa de la acumulación



Nota: Elaboración propia.

En palabras, se declara que el logaritmo mide acumulación relativa: duplicar b añade la misma cantidad de área, con independencia de la escala. Este caso instala una semántica multiplicativa de la acumulación.

Sinusoide y saldo neto nulo

En símbolos,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=0,$$

En gráficas, las áreas positiva y negativa se compensan. En palabras, se precisa que el saldo es cero por orientación opuesta, aclarando que el resultado no implica nulidad de la "superficie geométrica". Desde un plano didáctico, se corta de raíz la confusión área neta igual a superficie.

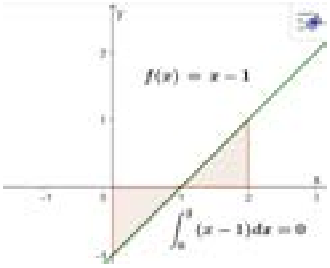
Función lineal con cambio de signo

En símbolos,

$$\int_0^2 (\mathrm{x}-1)\mathrm{dx}=0,$$

En gráficas, aparecen dos triángulos de igual área con orientación opuesta.

Figura 16.
Comportamiento de la semántica multiplicativa de la acumulación



Nota: Elaboración propia.

En palabras, se declara que el saldo neto se anula por compensación. Este caso fortalece el argumento de que la orientación es una propiedad semántica esencial de la integral definida.

Resumidamente, la coordinación de registros permite que el cálculo se viva como un lenguaje del cambio y no solo como un repertorio de técnicas. Por un lado, en límite se instala la semántica de cercanía y la necesidad de estabilización como criterio para decidir existencia.

Por otro lado, en derivada se organiza la lectura de la razón que se estabiliza y la linealización como gobierno local, incorporando ejemplos trascendentes que explicitan la relación entre valor y ritmo de cambio. Finalmente, en integral se afirma la acumulación orientada y su dependencia de la tasa, incluso cuando no hay antiderivadas elementales.

Por consiguiente, la enseñanza debe hacer explícito el ciclo ver–decir–simbolizar–justificar en cada actividad, con rúbricas que valoren la calidad de las conexiones y el control del error por encima del cálculo rutinario. En coherencia con Duval y Arcavi, y transitando por los mundos de Tall, se logra una comprensión robusta, flexible y transferible del cambio que fundamenta el cálculo universitario.

Modelación de fenómenos mediante funciones y simulaciones digitales con GeoGebra, Desmos y Python

La idea de límite nació para responder una pregunta elemental: ¿cómo describir con precisión lo que cambia? La modelación con funciones permite fijar esa intuición en una estructura matemática que se puede analizar, calcular y, hoy, simular con tecnología. Al formular un fenómeno como $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ elegimos qué variable explica y cuál responde, explicitamos supuestos y decidimos el rango en el que el modelo tiene sentido. Esta traducción no es neutra: delimita lo relevante y deja fuera lo accesorio. Como señalan Blum y Borromeo Ferri, modelar implica transitar por un ciclo que va del problema real a su formulación, resolución, interpretación y validación, con posibles refinamientos cuando la realidad resiste la primera versión del modelo (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

Desde el punto de vista cognitivo, el proceso exige coordinar registros de representación. Duval (2006) mostró que comprender matemáticas requiere pasar y vincular registros : gráfico, simbólico y verbal; sin confundirlos. En cálculo, esta coordinación se vuelve decisiva: la gráfica de una función sugiere regularidades; el lenguaje verbal nombra supuestos, condiciones iniciales y unidades; la notación algebraica permite operar con límites, derivadas e integrales. Las simulaciones digitales favorecen estos pasajes, porque hacen visible lo invisible: iteran, acercan y acumulan a velocidades que la mano no logra, pero conservan el control conceptual en el usuario (Tall, 2013).

Estructuras funcionales para fenómenos de cambio

En un primer nivel, la modelación funcional identifica patrones simples.

1. **Crecimiento lineal:** Cuando el cambio por unidad es constante, modelamos con $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right) = \mathrm{mx} + \mathrm{b}$. Es el caso de un tanque que se llena a caudal constante. Aquí el cálculo interpreta m como derivada constante y la integral como acumulación proporcional al tiempo.
2. **Cambio exponencial:** Si la tasa de variación es proporcional al valor presente, obtenemos $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right) = \mathrm{Ce}^{\mathrm{kx}}$.Modela radioactividad, interés compuesto o crecimiento con reproducción continua. La derivada $\mathrm{f}'\left(\mathrm{x}\right) = \mathrm{kCe}^{\mathrm{kx}}$ ancla la lectura: la función "se reproduce a sí misma" y la constante k fija la rapidez (Stewart, 2021). El hilo conductor es el mismo: derivadas como tasas locales que explican cómo cambia el sistema y, por dualidad, integrales como acumulaciones de esas tasas

Simulaciones como laboratorio de límites

La simulación digital añade un plano experimental a la modelación. No sustituye a la demostración; la complementa con evidencia generada por procedimientos controlados (Winsberg, 2010). Tres prácticas son especialmente fértiles en el capítulo de límites.

1. **Sumas de Riemann interactivas:** Un deslizador que aumenta el número de subintervalos nnn permite observar cómo las sumas inferiores, superior y por puntos medios se acercan

a un mismo valor. El límite $\lim_{n\to\infty} S_n$ deja de ser una promesa lejana y se vuelve un proceso tangible. GeoGebra o Desmos facilitan mostrar la diferencia $\left|S_n - \int_a^b f(x)dx\right|$ y cómo decrece al refinar la partición .

2. **Diferencias finitas y derivada:** Para una función f se simula la razón

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

con f decreciente. El comportamiento numérico revela dos lecciones: la convergencia hacia $f'(x)$ y la presencia de error de redondeo cuando h es demasiado pequeño. Esta tensión concreta el concepto de límite y muestra por qué la notación diferencial es una idealización precisa, no un cálculo a ojo (Stewart, 2021; Tall, 2013).

3. **Monte Carlo para área:** Generar puntos aleatorios en un rectángulo que contiene la región bajo $y = f(x)$ y estimar la fracción que cae por debajo de la curva aproxima el área. La ley de los grandes números se vuelve palpable y se interpreta la integral como promedio ponderado de valores, otra puerta conceptual a la acumulación.

Estas experiencias articulan la tríada de Duval: se manipulan objetos gráficos, se gobierna el proceso con lenguaje verbal y se formaliza con expresiones simbólicas. El resultado no es un "truco de software" sino un puente entre intuición y formalismo.

De la validación a la lectura crítica

Todo modelo es una narrativa cuantitativa con alcance. Validar es comparar lo que el modelo predice con lo que el sistema exhibe, cuantificar discrepancias y comprender sus causas. El ajuste de parámetros por mínimos cuadrados, las medidas de error relativo o la inspección de residuos ayudan a decidir si un modelo lineal basta o si se necesita curvatura (Giordano et al., 2013).

En contextos educativos, conviene cultivar preguntas guía: ¿qué supuestos permiten la linealidad?, ¿hay umbrales o capacidades de carga que sugieran logística?, ¿qué variable oculta podría estar modulando la tasa?

Las simulaciones favorecen la validación incremental: se implementa el modelo base, se confronta con datos, se registra dónde falla y se refina. Este ciclo desarrolla pensamiento variacional y criterio para distinguir correlaciones aparentes de mecanismos plausibles (Wilensky & Resnick, 1999).

Itinerarios didácticos con herramientas digitales

En la enseñanza inicial del cálculo, conviene diseñar secuencias breves y cerradas que unan fenómeno, función y límite.

Secuencia A. Renta y acumulación: Se plantea un ingreso semanal constante y un gasto proporcional al saldo. Se construye el modelo discreto $S_{k+1} = S_k + r - pS_k$, se simula y se compara con el continuo $S'(t) = r - pS(t)$. Se discute estabilidad y tiempo de convergencia. GeoGebra visualiza la trayectoria; Python permite estimar parámetros con datos sintéticos

Secuencia B. Enfriamiento de Newton: Se registra la temperatura de un líquido al ambiente y se ajusta $T'(t) = -k(T - A)$. La recta en la gráfica $\ln|T - A|$ versus t revela k. Se introducen derivada e integral con sentido físico y se conversa sobre fuentes de error de medición.

Secuencia C. Tráfico y flujo: Con una función de densidad $\rho(x,t)$ y una ley de flujo $q(\rho)$, se simula un tramo de carretera en versión discreta: la cantidad que entra y sale por celdas contiguas. Aunque sea un "pretexto" de una variable, la idea de conservación prepara el concepto de integral definida como balance neto.

En todas, el cierre conecta con el texto formal: se interpreta la derivada como tasa instantánea que modela cómo cambia el sistema y la integral como acumulación con orientación que conserva el saldo (Stewart, 2021). La evaluación privilegia explicaciones y decisiones de modelación más que resultados numéricos perfectos.

Criterios para una modelación responsable

1. **Pertinencia:** Que la forma funcional responda a un mecanismo verosímil, no solo a un buen ajuste.
2. **Escala y unidades:** Declarar rangos, dominios y niveles de medida.
3. **Sensibilidad:** Analizar cómo varían las conclusiones ante cambios razonables de parámetros.
4. **Comprensibilidad:** Preferir modelos interpretables para construir significados, en vez de cajas negras que devuelven números sin relato (Tall, 2013; Winsberg, 2010).

La modelación con funciones, acompañada de simulaciones digitales, devuelve al cálculo su vocación original: pensar el cambio con precisión, sin perder la intuición. El límite deja de ser un artificio técnico y se convierte en el corazón que late en cada aproximación, en cada refinamiento y en cada decisión de diseño de un modelo.

Diseño de tareas y evaluación para los fundamentos del cálculo

Este epígrafe organiza una tipología de ejercicios de "Fundamentos del cálculo y noción de límite" y propone formas de evaluación coherentes con una enseñanza centrada en la comprensión conceptual, el uso coordinado de representaciones y la resolución de problemas auténticos. El diseño se apoya en la alineación constructiva entre objetivos, actividades y evidencias de logro, y en la evaluación formativa como motor de aprendizaje (Biggs, 1996; Black & Wiliam, 1998).

Principios de diseño

1. **Alineación constructiva:** Los ejercicios deben evidenciar exactamente lo que se declara en los resultados de aprendizaje.
2. **Coordinación de registros:** Cada tarea debe invitar a traducir entre lo gráfico, lo simbólico y lo verbal (Duval, 2006).
3. **Razonamiento más que receta:** Se promueve el paso de respuestas imitativas a explicaciones con justificación propia.
4. **Retroalimentación que regula el aprender:** Criterios claros, oportunidades de reintento y metacognición .
5. **Diversidad y autenticidad:** Problemas contextualizados y variadas formas de evidenciar comprensión, no solo pruebas tradicionales.

Tipología de ejercicios

1. Reconocimiento y traducción de representaciones

Objetivo: Identificar propiedades locales del cambio y del acercamiento al límite.

Tareas tipo:

- Dado un gráfico con una discontinuidad removible, explicar si existe
$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) y$$ y si f es continua.
- A partir de una tabla de valores, conjeturar el límite e indicar un margen de error. **Evidencia esperada:** enunciados verbales precisos, uso correcto de notación, control de error. **Criterios:** coherencia entre registro gráfico, tabular y simbólico; justificación.

2. Estimación numérica y control de error

Objetivo: Aproximar límites y cuantificar precisión.

Tareas tipo:

- Aproximar $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ con tabla de pasos decrecientes y acotar el error.
- Diseñar un algoritmo breve en Python o en la calculadora gráfica que pare cuando el cambio relativo sea menor que 10^{-k}. **Criterios:** elección adecuada de pasos, estimación de error y reporte reproducible.

3. Procedimientos simbólicos fundamentales

Objetivo: Aplicar reglas y técnicas con sentido.

Tareas tipo:

- Resolver límites con factorización, racionalización o equivalentes notables.
- Detectar indeterminaciones y justificar el método elegido. **Criterios:** corrección algebraica, selección del procedimiento y explicación breve del porqué.

4. Comprensión teórica y demostración
Objetivo:rticular definiciones y argumentos.
Tareas tipo:
- Redactar una demostración $\varepsilon - \delta$ de $\lim_{x \to 3} 2x = 6$ proponiendo un $\delta(\varepsilon)$ y verificando la cadena de implicaciones.
- Probar que continuidad en [a,b] implica integrabilidad de Riemann. **Criterios:** uso de cuantificadores, claridad lógica, cierre de implicaciones y control de hipótesis (Tall, 2013).

5. Modelación y simulación del cambio
Objetivo: Construir funciones que representen fenómenos y analizar su comportamiento local.
Tareas tipo:
- Amortiguación de señales: ajustar $f(t) = Ae^{-kt}$ a datos y discutir
$$\lim_{t \to \infty} f(t)$$
- Tránsito vehicular: estimar una tasa de arribo con colas y justificar el uso de promedios locales. **Criterios:** explicitar supuestos, validar con datos, interpretar parámetros, analizar sensibilidad.

6. Razonamiento variacional y conexiones tasa–acumulación
Objetivo: Vincular límites, continuidad y la idea de área orientada.
Tareas tipo:
- Dado v(t) como gráfica, estimar $\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$ por Riemann y explicar la relación con el desplazamiento. **Criterios:** coherencia física, elección de particiones, discusión del signo y de la orientación.

7. Diagnóstico de concepciones y errores frecuentes
Objetivo: Hacer explícitas ideas previas.
Tareas tipo:
- Ítems de opción múltiple con distractores focalizados: confundir valor de la función con el límite, creer que "existe derivada implica continuidad al revés", etc. **Criterios:** justificar la elección, identificar el supuesto erróneo y corregirlo.

Formas de evaluación y sus instrumentos
A. Diagnóstica
- Qué: concepciones iniciales sobre límite, continuidad y aproximación.
- Cómo: breve cuestionario con ítems gráficos y dos preguntas abiertas.
- Instrumentos: lista de cotejo sobre lenguaje y registros.
- Uso: ajustar secuencias y grupos de trabajo.

B. Formativa

- Qué: progreso en traducción de registros y calidad de explicaciones.
- Cómo: tareas semanales de baja ponderación, cuestionarios de dos etapas (individual + equipo), miniproyectos de simulación.
- Instrumentos: rúbricas analíticas con criterios visibles antes de la tarea. Retroalimentación orientada a metas y oportunidad de reentrega.

Rúbrica breve ejemplo: "Límite desde representaciones"

- Interpretación gráfica correcta y consistente.
- Uso preciso de notación y lenguaje.
- Justificación del valor límite con control de error.
- Coherencia entre registros.
- Cada criterio con cuatro niveles: incipiente, básico, logrado, sobresaliente.

C. Sumativa

- Qué: síntesis de capacidades en contextos conocidos y nuevos.
- Cómo: **Prueba escrita** con secciones balanceadas: representación, técnica, explicación teórica, modelación. **Producto auténtico** informe corto de modelación con datos reales o simulados, código o hoja de cálculo, y defensa oral de 5 minutos.
- Instrumentos: rúbrica para el informe (supuestos, ajuste, validación, interpretación) y para la defensa (claridad, respuestas, vínculo con teoría).
- Ponderación sugerida: 50 % prueba, 30 % informe, 20 % defensa. Ajustar a la malla y normativa.

D. Evaluación entre pares y autorregulación

- Qué: juicio crítico sobre soluciones y criterios de calidad
- Cómo: calificación calibrada de soluciones anónimas con guías ejemplares.
- Instrumentos: rúbrica simplificada y reflexión escrita breve.
- Sentido: desarrolla agencia y metacognición, claves para un aprendizaje sostenible (Boud & Soler, 2016).

Conclusiones

Cerramos el capítulo con una idea simple y potente: enseñar cálculo es acompañar a los estudiantes en la construcción de significados sobre el cambio. Esto exige trabajar de forma coordinada los tres registros, simbólico, gráfico y verbal, y convertir a la tecnología en un soporte para explorar, conjeturar y comprobar. GeoGebra, Desmos y Python ayudan a mirar de cerca lo que varía, a comparar aproximaciones y a documentar el razonamiento. Lo esencial no es producir resultados aislados, sino aprender a contar lo que se está haciendo, por qué se elige un método y qué tan confiable es la respuesta. Cuando las tareas invitan a traducir entre registros y a justificar decisiones, el pensamiento variacional y el razonamiento funcional se vuelven visibles y enseñables.

Desde esta perspectiva, la didáctica se organiza alrededor de la estructura tasa, acumulación y sentido. La derivada se entiende como razón de cambio que permite linealizar lo local, la integral definida como saldo acumulado que emerge de sumas de Riemann, y el Teorema Fundamental del Cálculo como el puente que articula ambas ideas. La evaluación, en consecuencia, debe premiar explicaciones claras, estimaciones de error, interpretaciones de parámetros y conexiones con contextos reales. Con secuencias que combinan problemas guiados, modelación con datos y espacios de retroalimentación oportuna, el aula se convierte en un laboratorio para pensar con rigor y comunicar con precisión, de modo que los estudiantes puedan transferir lo aprendido a nuevas situaciones y sostener su aprendizaje en el tiempo.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Biggs, J. (1996). Enhancing teaching through constructive alignment. Higher Education, 32(3), 347–364. https://doi.org/10.1007/BF00138871

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5(1), 7–74. https://doi.org/10.1080/0969595980050102

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 45–58.

Boud, D., & Soler, R. (2016). Sustainable assessment revisited. Assessment & Evaluation in Higher Education, 41(3), 400–413. https://doi.org/10.1080/02602938.2015.1018133

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 153–166). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Giordano, F. R., Weir, M. D., & Fox, W. P. (2013). A first course in mathematical modeling (5th ed.). Cengage Learning.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 115–141.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65–97). Macmillan.

Kaput, J. J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Eds.), Didactics of mathematics as a scientific discipline (pp. 379–397). Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sierpińska, A. (1994). Understanding in mathematics. Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1

Stewart, J. (2021). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (9.º ed.). Cengage Learning.

Tall, D. (2013). How humans learn to think mathematically. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Wiggins, G. (1990). The case for authentic assessment. Practical Assessment, Research & Evaluation, 2(2), 1–3. https://doi.org/10.7275/ffb1-mm19

Wilensky, U., & Resnick, M. (1999). Thinking in levels: A dynamic systems approach to making sense of the world. Journal of Science Education and Technology, 8(1), 3–19. https://doi.org/10.1023/A:1009421303064

Winsberg, E. (2010). Science in the age of computer simulation. University of Chicago Press.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), Research in collegiate mathematics education IV (pp. 103–122). American Mathematical Society.