PRIMERA EDICIÓN

Del álgebra a las funciones trascendentes: un recorrido formativo

AUTORÍA

CEVALLOS AYON EDWIN RAMON
GUERRERO ZAMBRANO MARCOS FRANCISCO

EDICIONES RISEI

COLECCIÓN:
Eduación en acción. Praxis, currículo y subjetividades

Del álgebra a las funciones trascendentes: un recorrido formativo

Autores

Cevallos Ayon Edwin Ramon
Universidad Estatal de Milagro
ecevallosa@unemi.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-3337-2009

Guerrero Zambrano Marcos Francisco
Universidad Estatal de Milagro
mguerreroz@unemi.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-1028-7477

Editorial: *Ediciones RISEI*
Colección Educación en acción: Praxis, currículo y subjetividades
Título del libro: Del álgebra a las funciones trascendentes: un recorrido formativo
Autoría: Cevallos Ayon Edwin Ramon / Guerrero Zambrano Marcos Francisco
Edición: Primera edición
Año: 2025
ISBN digital: 978-9942-596-06-2
DOI: https://doi.org/10.63624/risei.book-978-9942-596-06-2

Coordinación editorial: Jorge Maza-Córdova y Tomás Fontaines-Ruiz
Corrección de estilo: Unidad de Redacción y Estilo
Diagramación y diseño: Unidad de Diseño
Revisión por pares: Sistema doble ciego de revisión externa

Machala – Ecuador, diciembre de 2025

Este libro fue diagramado en InDesign.
Disponible en: https://editorial.risei.org/
Contacto: info@risei.org

Prólogo

La palabra álgebra proviene del árabe ***al-ŷabr,*** que significa "recomponer" o "restaurar". Este término apareció por primera vez en un libro escrito alrededor del año 825 por el matemático persa ***Al-Jwārizmī***, titulado ***Al-kitāb al-mujtaṣar fī ḥisāb al-ŷabr wa-l-muqābala***, que se traduce como El compendio sobre el cálculo por reducción y comparación. En esa obra, ***al-ŷabr*** se usaba para describir la acción de mover términos negativos de un lado al otro de la ecuación para hacerlos positivos, mientras que ***al-muqābala*** se refería al proceso de simplificar y equilibrar los términos semejantes.

Con el paso del tiempo, este libro fue traducido al latín en el siglo XII, lo que permitió que tanto las ideas como el término "álgebra" llegaran a Europa. Desde entonces, la palabra comenzó a usarse para nombrar el arte de resolver ecuaciones. Su evolución conceptual hizo que dejara de entenderse únicamente como un conjunto de técnicas aplicadas a ecuaciones simples, para convertirse progresivamente en un campo más abstracto y estructurado dentro de las matemáticas. Este cambio marcó un punto de inflexión en el desarrollo del pensamiento matemático en la Edad Media y el Renacimiento.

En la actualidad, el álgebra constituye una de las ramas fundamentales de las matemáticas, pues no solo estudia la manipulación de ecuaciones, sino también expresiones algebraicas, relaciones, estructuras y sistemas numéricos de gran complejidad. Gracias a su capacidad de generalización y abstracción, el álgebra se ha consolidado como una herramienta esencial en áreas como la ciencia, la tecnología, la economía y la ingeniería, donde permite modelar problemas, analizar situaciones complejas y encontrar soluciones aplicables en la vida real.

Introducción

El tránsito del álgebra hacia las funciones trascendentes constituye uno de los viajes intelectuales más profundos del aprendizaje matemático: un recorrido que conduce desde la manipulación de símbolos hasta la interpretación de fenómenos complejos que explican la naturaleza, la economía o el comportamiento humano. Este libro, Del álgebra a las funciones trascendentes: un recorrido formativo, surge con el propósito de acompañar ese trayecto, articulando el rigor conceptual con una mirada pedagógica orientada a la comprensión y la exploración.

En sus capítulos, el texto propone una secuencia que avanza desde las ecuaciones e inecuaciones elementales hasta los modelos funcionales que describen el crecimiento, la periodicidad y la oscilación. Cada sección busca construir puentes entre los diferentes niveles de abstracción, de modo que el estudiante pueda reconocer la continuidad entre las operaciones básicas del álgebra y la lógica delñ cambio que caracteriza al cálculo.

La obra se apoya en tres pilares fundamentales: la rigurosidad conceptual, la coherencia didáctica y la conexión con la experiencia. Cada capítulo combina la exposición teórica con ejemplos contextualizados, ejercicios de exploración y reflexiones pedagógicas que permiten resignificar los contenidos. Las tecnologías digitales se incorporan no como accesorios, sino como instrumentos para pensar, modelar y verificar.

En el capítulo inicial, el álgebra se presenta como un lenguaje universal que permite describir relaciones entre cantidades y estructuras; posteriormente, el estudio de los sistemas, las funciones algebraicas y las transformaciones gráficas prepara el terreno para adentrarse en el análisis de las funciones trascendentes, núcleo del cuarto capítulo.

Más allá de la formalidad matemática, este libro propone una mirada formativa. Enseñar funciones trascendentes significa formar pensamiento reversible, flexible y analítico; significa también comprender que detrás de cada ecuación hay un modelo del mundo. Cada capítulo culmina con una síntesis reflexiva que invita al diálogo entre la teoría, la práctica y la didáctica. En última instancia, Del álgebra a las funciones trascendentes busca que el lector reconozca en la matemática un lenguaje vivo: un modo de mirar, de preguntar y de construir sentido en un universo en constante transformación.

Contenido

índice de tabla y figuras

Capítulo I

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo II

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo III

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo IV

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo I

Ecuaciones e inecuaciones algebraicas

Introducción

El estudio del álgebra constituye uno de los pilares más significativos en la formación del pensamiento matemático, pues en ella convergen la abstracción, la simbolización y la capacidad de generalizar relaciones. Este primer capítulo, titulado Ecuaciones e inecuaciones algebraicas, se propone guiar al lector desde los fundamentos numéricos hacia la comprensión profunda de las igualdades y desigualdades, no como simples ejercicios de cálculo, sino como estructuras de razonamiento que modelan situaciones reales y promueven el pensamiento lógico. En este sentido, comprender una ecuación o una inecuación es aprender a traducir un problema verbal en un lenguaje simbólico que permite analizar, comparar y resolver con precisión. Así, las operaciones algebraicas dejan de ser una manipulación mecánica para convertirse en un modo de pensar, de descubrir patrones y de formular conjeturas.

A lo largo del capítulo, se desarrollan los conceptos esenciales del sistema de los números reales, sus propiedades y subconjuntos, como punto de partida para abordar la resolución de ecuaciones e inecuaciones en diferentes niveles de complejidad. La propuesta didáctica no se limita a la exposición teórica, sino que incorpora estrategias activas de enseñanza, ejercicios de traducción del lenguaje natural al algebraico y el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra y Desmos, que permiten visualizar las relaciones entre expresiones y gráficas. Desde esta perspectiva, el aprendizaje del álgebra se concibe como un proceso de construcción de significados que articula los registros simbólico, gráfico y verbal, favoreciendo una comprensión integral del fenómeno matemático.

Este capítulo invita, además, a descubrir el valor cultural y formativo del álgebra. Comprender el origen histórico de las ecuaciones, desde los aportes de ***Al-Jwārizmī*** hasta la formalización moderna con Viète y Descartes, permite reconocer que las matemáticas son una creación humana que evoluciona al ritmo de las necesidades del pensamiento y la sociedad. Resolver ecuaciones e inecuaciones es, en última instancia, resolver problemas de la vida cotidiana, científica y tecnológica. De ahí que la enseñanza de estos contenidos no deba reducirse a la memorización de reglas, sino orientarse a desarrollar competencias para razonar, argumentar y aplicar. Este capítulo sienta así las bases de un recorrido que llevará al lector del álgebra elemental al universo de las funciones trascendentes, donde el lenguaje simbólico se transforma en una herramienta para comprender la dinámica del cambio y la continuidad en el mundo que nos rodea.

Conceptos fundamentales del álgebra

El estudio de las ecuaciones e inecuaciones ocupa un lugar central en la formación matemática, ya que constituye la base sobre la cual se construyen conceptos más avanzados del álgebra y el análisis. Resolver una ecuación significa encontrar los valores que satisfacen una igualdad, mientras que en las inecuaciones el objetivo es determinar los intervalos que cumplen con una desigualdad. Estos procedimientos no son meramente técnicos, sino que representan un proceso de modelación en el que los estudiantes aprenden a traducir situaciones concretas en expresiones algebraicas. Como señalan Stewart (2016) y Blitzer (2018), el trabajo con ecuaciones e inecuaciones permite desarrollar habilidades de razonamiento lógico, interpretar gráficas y aplicar modelos matemáticos en diversos campos del conocimiento.

Más allá de su utilidad práctica, las ecuaciones e inecuaciones favorecen la adquisición de competencias matemáticas fundamentales como la comprensión conceptual, la fluidez procedimental y el razonamiento adaptativo (Kilpatrick et al., 2001). Al enfrentarse a problemas que involucran igualdades o desigualdades, los estudiantes no solo aplican algoritmos, sino que también toman decisiones sobre el camino a seguir, validan sus resultados y reflexionan sobre su coherencia en el contexto planteado. De este modo, su estudio trasciende el aula y se proyecta hacia la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología, consolidando al álgebra como un lenguaje esencial para describir y transformar la realidad.

Números reales y subconjuntos

El conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ constituye el pilar sobre el cual se edifica gran parte del pensamiento matemático contemporáneo, ya que abarca los números empleados tanto en la vida diaria como en el ámbito científico. Representados gráficamente en la recta real, permiten describir magnitudes discretas y continuas, y se convierten en una herramienta fundamental para modelar fenómenos de diversa naturaleza. Dentro de este amplio conjunto se organizan varios subconjuntos, cada uno con propiedades específicas que, en su interacción, conforman una estructura numérica coherente y de gran riqueza conceptual (Stewart, 2016; Blitzer, 2018).

Entre ellos, los números naturales (N) se presentan como los primeros que el ser humano utilizó para contar y ordenar objetos: 1, 2, 3,…. En ciertas definiciones se incluye también el cero, lo cual amplía su campo de aplicación. Son el punto de partida para las operaciones aritméticas básicas y la base sobre la cual se construyen sistemas numéricos de mayor complejidad (Sullivan, 2016).

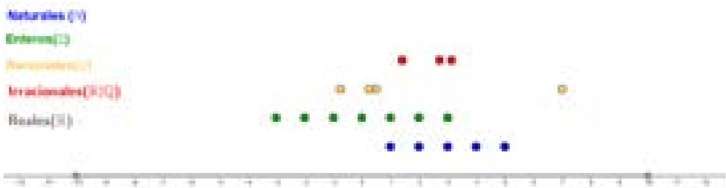
A partir de los naturales surgen los números enteros (Z), que incorporan tanto al cero como a los números negativos, conformando la secuencia …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…. Este subconjunto resulta indispensable para representar situaciones que involucran pérdidas, temperaturas bajo cero o posiciones relativas por debajo de un punto de referencia, y marca un paso esencial en la transición de la aritmética hacia el razonamiento algebraico (Stewart, 2016).

Más adelante aparecen los números racionales (Q), los cuales quedan definidos a partir del cociente entre dos enteros con denominador distinto de cero. Este conjunto incluye a los enteros y se distingue porque sus expresiones decimales siempre son finitas o periódicas. Su utilidad es evidente en contextos prácticos, como el trabajo con fracciones, proporciones y razones aplicadas en estadística, economía o geometría. Además, poseen la propiedad de densidad, lo que significa que entre dos racionales siempre se puede encontrar otro, enriqueciendo así su estructura (Blitzer, 2018).

En contraste, los números irracionales $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ no admiten representación como fracción de enteros, y sus decimales son infinitos y no periódicos. Entre los ejemplos más conocidos se encuentran $\pi \approx 3.141592653\ldots$ estrechamente ligado a la geometría de los círculos; $e \approx 2.718281828\ldots$, fundamental en procesos de crecimiento continuo; y raíces no exactas como $\sqrt{2} \approx 1.414213562\ldots$ Estos números complementan a los racionales para conformar el conjunto completo de los reales, cuya importancia radica en la posibilidad de describir magnitudes continuas y servir de base al análisis matemático (Sullivan, 2016).

La clasificación de los números reales (véase Figura 1) se suele representar de manera jerárquica: los naturales $(\mathbb{N})$ corresponden al conteo inicial; al agregar el cero y los negativos surgen los enteros $(\mathbb{Z})$; al introducir fracciones y decimales periódicos o finitos se obtienen los racionales $(\mathbb{Q})$; mientras que los irracionales $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ completan la estructura con sus decimales infinitos no periódicos. Todos estos subconjuntos, integrados, conforman el universo de los números reales (R), que encuentran su representación en la recta real

Figura 1.
Clasificación de los números reales



Nota: Elaboración propia.

En conjunto, los números reales y sus subconjuntos forman un sistema sólido y coherente que no solo sustenta los fundamentos del álgebra y el cálculo, sino que también permite comprender y describir fenómenos de la vida real en campos diversos como resulta ser la física y economía, así como tecnología. De ahí que su enseñanza en los primeros niveles de la formación matemática sea decisiva: constituyen la base conceptual desde la cual se construyen razonamientos más complejos y se desarrollan habilidades de pensamiento lógico y abstracto (Stewart, 2016; Blitzer, 2018).

En el lenguaje matemático, además de los números, aparecen las letras, a, b, c, x, y,..., que usamos para representar valores que pueden variar. A estas representaciones se les llama variables. Con ellas expresamos relaciones de igualdad o desigualdad: por ejemplo, si dos variables representan el mismo número, escribimos a = b, leído como "a es igual a b"; mientras que, si representan valores distintos, utilizamos $a \neq b$, que se lee "a no es igual a b".

Los números no se limitan a ser simples instrumentos de cálculo; también guardan historias y misterios que han fascinado a generaciones de matemáticos. Un caso representativo es el de los números primos, descritos como los "átomos" de la aritmética porque no pueden descomponerse en otros más pequeños: su definición es sencilla, solo son divisibles entre uno y ellos mismos (Ribenboim, 2016). Sin embargo, su distribución en la recta numérica sigue siendo un enigma, pues a pesar de siglos de estudio, no se ha encontrado un patrón definitivo que explique cómo aparecen, lo que mantiene vivo un campo de investigación apasionante (Crandall & Pomerance, 2005). Más allá de su importancia teórica en la factorización de enteros, los números primos cumplen hoy un papel esencial en la vida cotidiana: constituyen la base de sistemas de criptografía que resguardan la seguridad digital en la que confiamos constantemente.

Dentro de la teoría de números, los números perfectos ocupan un lugar especial. Se llaman así porque son aquellos cuya suma de divisores propios, es decir, de todos excepto el número mismo, coincide exactamente con su valor. El ejemplo más elemental es el 6, ya que 1 + 2 + 3 = 6; otro caso clásico es el 28, pues 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28. Desde tiempos antiguos, estas cifras fueron vistas como símbolos de equilibrio y perfección (Stewart, 2016). Con el avance de la matemática se descubrió su relación con los primos de Mersenne, lo que ha permitido, gracias a la potencia de las computadoras modernas, identificar números perfectos cada vez más grandes. Aunque su utilidad práctica se centra sobre todo en la investigación teórica, constituyen un claro ejemplo de cómo la matemática busca patrones profundos y armonías ocultas incluso en los aspectos más sencillos de la aritmética.

Finalmente, los llamados números amigos o amistosos muestran una relación todavía más singular y es que se trata de pares de números enteros que cumplen la condición de que la suma de los divisores propios de uno coincide con el otro, y viceversa. El caso más conocido es el par (220, 284): la suma de los divisores de 220 es 284, y la de los divisores de 284 es 220. Este tipo de números fue visto en la antigüedad como un símbolo de amistad y cooperación, por la reciprocidad que encarnan (Burton, 2011).

En definitiva, ya sea a través de su utilidad práctica o de las curiosidades que encierran, los números muestran que detrás de cada símbolo hay historias, problemas abiertos y conexiones inesperadas. Esta riqueza conceptual prepara el terreno para adentrarse en el estudio de las ecuaciones e inecuaciones, donde las letras y los números conviven para dar forma a un lenguaje capaz de describir, con precisión y belleza, tanto la realidad como los propios misterios de la matemática.

El Teorema fundamental de la aritmética expresa que todo número entero mayor que 1 puede expresarse de manera única como un producto de números primos, salvo el orden en que se escriban los factores. Por ejemplo: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

El Teorema Fundamental de la Aritmética es una de esas ideas que ayudan a entender cómo está construido el mundo de los números. Según Hardy y Wright (2008), todos los números enteros mayores que uno se pueden formar a partir de los números primos, que son como los "ladrillos básicos" de la aritmética. Dicho de otro modo, si uno descompone cualquier número, siempre llega a los mismos elementos primos, sin importar el orden en que se los multiplique. Esta propiedad, que parece sencilla, encierra una verdad profunda: todo número tiene una estructura interna que se sostiene en los primos.

Desde la enseñanza, este teorema puede ser una gran oportunidad para trabajar la idea de que las matemáticas no son una lista de fórmulas, sino una forma de pensar. Al guiar a los estudiantes a descubrir por sí mismos cómo los números se descomponen en factores primos, el aprendizaje se vuelve más activo y significativo. La experiencia de "construir" o "desarmar" números refuerza la comprensión de la multiplicación, la divisibilidad y la estructura del sistema numérico.

En el fondo, Hardy y Wright (2008) nos recuerdan que las matemáticas se parecen mucho a la vida: todo lo grande se compone de cosas pequeñas, y entender esas partes nos permite ver el conjunto con más claridad. Los números primos son, en cierto modo, una metáfora del aprendizaje mismo: para entender lo complejo, hay que empezar por lo esencial.

La propuesta se apoya en dos ideas esenciales: la existencia, que asegura que siempre es posible descomponer un entero en factores primos, y la unicidad, que afirma que esta factorización solo puede darse de una forma, sin importar el orden de los factores (Apostol, 2013). La importancia de este resultado radica en que ofrece un marco de certeza y consistencia a toda la teoría de números, pues sin él no sería posible organizar de manera sistemática la estructura de los enteros.}

Propiedades fundamentales en el Sistema de números reales

El sistema de números reales posee una serie de propiedades fundamentales que garantizan la coherencia de las operaciones aritméticas y algebraicas. Entre ellas se encuentran:

1. **Propiedades de la adición y multiplicación:** Incluyen la **conmutativa**

$$(a + b = b + a,\ ab = ba)$$

la **asociativa**

$$((a + b) + c = a + (b + c),\ (ab)c = a(bc)),$$

y la existencia del elemento neutro (0 en la suma, 1 en la multiplicación).

2. **Propiedades de inverso:** Para cada número real existe un opuesto aditivo $(a + (-a) = 0)$ y, salvo el cero, un inverso multiplicativo

$$\left(a \cdot \frac{1}{a} = a\right)$$

3. **Propiedad distributiva:** Relaciona suma y multiplicación, garantizando que $a(b + c) = ab + ac$.

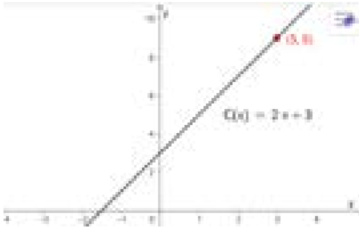
4. **Propiedad de orden:** Los reales están totalmente ordenados, es decir, para cualesquiera a y b, se cumple una y solo una de estas condiciones: $a < b,\ a = b \text{ o } a > b$.
5. **Propiedad de densidad:** Entre dos números reales distintos siempre existe al menos otro número real.
6. **Propiedad del supremo o completitud:** Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene un mínimo de sus cotas superiores (llamado supremo). Esta propiedad distingue a R de los números racionales (Apostol, 2013).

Estas propiedades resultan esenciales en la construcción del cálculo diferencial e integral, pues permiten justificar la continuidad, los límites y la convergencia de sucesiones y series. Además, tienen aplicaciones directas en el análisis de funciones, en la resolución de ecuaciones algebraicas y en el modelado de fenómenos físicos y sociales. Su aprendizaje no solo aporta a la formación matemática rigurosa, sino que también desarrolla la capacidad de razonar lógicamente y aplicar la matemática en contextos diversos (Anton et al., 2013)

EJEMPLO 1 Uso de propiedades fundamentales

Una persona compra 3 paquetes de galletas que cuestan 2 dólares cada uno, además de 2 litros de leche a 1,50 dólares cada litro. ¿Cuál es el costo total de la compra?

Figura 2.
Modelo lineal del costo total



Nota: Elaboración propia.

Solución:
Planteamiento de la operación: $(3 \cdot 2) + (2 \cdot 1.5)$

- Transformación:
- Factorizando: $2(3 + 1.5)$
- Conmutativa y asociativa:
- $3 + 1.5 = 4.5$
- $2 \cdot 4.5 = 9$

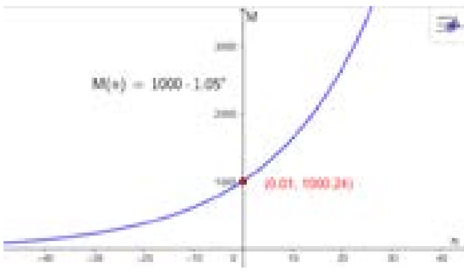
Respuesta: El costo total de la compra es 9 dólares.

Apoyo didáctico: Al costo depender de dos variables $C(x, y) = 2x + 1.5y$ (x: paquetes de galletas e y: litros de leche), se sugiere orientar el debate en fijar una de ellas (litros de leche) y obtener $C(x) = 2x + 3$.

EJEMPLO 2: Uso de propiedades fundamentales

Un inversionista deposita 1000 dólares en una cuenta de ahorros que ofrece un interés compuesto anual del 5 %. Si mantiene su capital durante 2 años sin realizar retiros ni depósitos adicionales, determine el monto acumulado al final del período utilizando la fórmula del interés compuesto $\left(M = 1000(1 + 0.05)^2\right)$.(véase Figura 3)

Figura 3.
Crecimiento exponencial del capital mediante interés compuesto.



Nota: Elaboración propia.

Solución:
Planteamiento de la operación: $1000(1 + 0.05)^2$

Transformación: Aplicación de propiedad distributiva y potenciación:

- $(1 + 0.05)^2 = 1 + 2(0.005) + (0.005)^2$
- $(1 + 0.05)^2 = 1 + 0.10 + 0.0025$
- $(1 + 0.05)^2 = 1.1025$

Cálculo final: $\mathrm{M} = 1000(1.1025) = 1102.5$

Respuesta: El monto total es de 1102,50 dólares.

Apoyo didáctico: Se sugiere orientar el debate en términos de que el interés compuesto genera un crecimiento exponencial del capital, donde los intereses producen nuevos intereses, recomendándose elaborar una tabla.

Exponentes y radicales

Dentro del estudio del álgebra, los exponentes y radicales constituyen dos nociones esenciales que permiten dar orden y claridad a expresiones que, sin ellos, resultarían extensas o poco manejables. El exponente, entendido como una notación abreviada para expresar la multiplicación repetida de un número por sí mismo, ha servido históricamente para simplificar operaciones y avanzar hacia un lenguaje matemático más compacto y expresivo (Stewart, 2016). Así, cuando escribimos 2^5, evitamos la repetición de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, lo cual refleja la potencia de la notación algebraica para expresar con precisión ideas complejas en forma concisa.

Los exponentes surgen como una forma abreviada de expresar la multiplicación repetida de un mismo número. En términos generales, si **"a"** es un número real y **"n"** un número natural, la potencia a^{n} se define como el producto de **"a"** por sí mismo **"n"** veces:

$$\mathrm{a}^{\mathrm{n}} = \underbrace{\mathrm{a} \times \mathrm{a} \times \mathrm{a} \times \ldots \times \mathrm{a}}\mathrm{n}\ \text{factores}$$

Esta notación, que a simple vista parece un recurso de economía simbólica, encierra una gran riqueza conceptual, pues permite extender la noción de potencia a exponentes enteros, racionales e incluso reales. Stewart (2016) señala que la potencia constituye una de las primeras herramientas de abstracción en álgebra, ya que permite generalizar operaciones más allá del simple conteo aritmético.

Tabla 1.
Propiedades de las potencias

Propiedad	Expresión general	Ejemplo
Producto de potencias con igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$
Cociente de potencias con igual base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$	$\frac{5^6}{5^2} = 5^4 = 625$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(3^2\right)^4 = 3^8 = 6561$
Potencia de un producto	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 216$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$	$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
Exponente cero	$a^0 = 1,\ a \neq 0$	$7^0 = 1$
Exponentes negativos	$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$

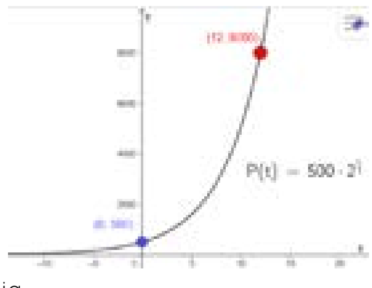
Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 3: Crecimiento de una población de bacterias

En un laboratorio de biología, un grupo de estudiantes investiga el crecimiento de una población de bacterias en condiciones controladas. Se sabe que, en promedio, la población se duplica cada 3 horas. Al inicio del experimento, se cuentan 500 bacterias en la muestra. La situación se modela con la fórmula del crecimiento exponencial:

$P(t) = P_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$, donde: P(t) es el número de bacterias después de t horas, P_0 la población inicial (500) y $2^{\frac{t}{3}}$ el factor de crecimiento, al duplicarse cada 3 horas (véase Figura 4). ¿Cuántas bacterias habrá después de 12 horas?

Figura 4.
Crecimiento exponencial del capital mediante interés compuesto.



Nota: Elaboración propia.

Solución: $P(12) = 500 \cdot 2^{\frac{12}{3}} = 500 \cdot 2^4 = 500 \cdot 16 = 8000.$

Apoyo didáctico: Se sugiere orientar el debate en términos del reconocimiento de que, en solo medio día, la población inicial se multiplicó por 16. Este resultado permite a los estudiantes comprender cómo los exponentes no son solo reglas abstractas, sino herramientas para modelar fenómenos reales como el crecimiento biológico. De esta forma, los estudiantes visualizan que las potencias y sus propiedades son el lenguaje matemático que describe procesos de la vida real: lo que antes era una multiplicación repetida, ahora se traduce en entender la rapidez de expansión de organismos vivos o incluso la propagación de virus y contaminantes.

El conjunto de estas propiedades asegura que las potencias no sean simples operaciones, sino un sistema coherente y estructurado que se conecta con múltiples áreas de la matemática. Desde el álgebra elemental hasta el cálculo avanzado, las reglas de los exponentes permiten justificar transformaciones, simplificar expresiones y resolver ecuaciones de diversa índole. Apostol (2013) afirma que la consistencia de estas propiedades refleja la naturaleza lógica de la matemática: cada nueva extensión (exponentes negativos, fraccionarios o reales) se fundamenta en la necesidad de mantener la coherencia interna del sistema.

Apoyo didáctico: En el plano pedagógico, enseñar exponentes va más allá de transmitir reglas mecánicas. Es necesario promover la comprensión del "por qué" detrás de cada propiedad, mostrando cómo se derivan unas de otras y cómo encuentran aplicación en contextos reales como por ejemplo el cálculo del interés compuesto, el crecimiento de una población bacteriana o la reducción de contaminantes en procesos químicos permiten a los estudiantes conectar la teoría con situaciones significativas de su entorno (Sullivan, 2016; Stewart, 2016).

En el marco del álgebra elemental, los radicales representan la operación inversa a la potenciación. Mientras que los exponentes expresan la multiplicación repetida de un número, los radicales permiten identificar qué valor, al ser elevado a cierta potencia, reproduce el número original. Formalmente, si $\mathbf{a}^{\mathrm{n}} = \mathbf{b}$, entonces **"a"** es la raíz **"n"- ésima** de **"b"**, lo que se escribe como $\sqrt[n]{b} = a$. Así, los radicales extienden el campo de las operaciones aritméticas y se convierten en una herramienta clave para la resolución de ecuaciones y la simplificación de expresiones algebraicas (Larson & Edwards, 2019).

Elementos de un radical

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, se distinguen cuatro componentes esenciales:

1. **Índice (n):** indica el grado de la raíz. Cuando no aparece explícito, se asume que es 2 (raíz cuadrada).

2. **Radicando (a):** el número o expresión de la cual se extrae la raíz.
3. **Signo radical ($\sqrt{}$):** símbolo que introduce la operación.
4. **Resultado (raíz):** el valor que, al elevarse al índice, devuelve el radicando.

Esta notación se consolidó históricamente en el siglo XVI, cuando los matemáticos europeos comenzaron a emplear el símbolo $\sqrt{}$ de manera sistemática. Desde entonces, los radicales han constituido un puente entre la aritmética básica y los desarrollos posteriores del análisis matemático (Burton, 2011). El trabajo con radicales se apoya en un conjunto de propiedades que garantizan la coherencia de las operaciones

Propiedades fundamentales de los radicales

1. **Producto de radicales con igual índice:**

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \ , \ a, b \geq 0.$$

2. **Cociente de radicales con igual índice:**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \ b \neq 0.$$

3. **Radical de un radical:**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

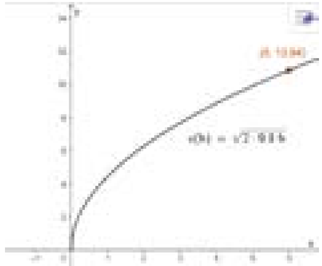
4. **Transformación a exponente fraccionario:**

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \ a \geq 0.$$

Estas propiedades permiten simplificar expresiones algebraicas complejas, resolver ecuaciones que involucran raíces y conectar el concepto de radical con el de exponente racional (Sullivan, 2016).

EJEMPLO 4: En una práctica de laboratorio de Física (Véase Figura 5), los estudiantes deben calcular la velocidad con la que llega al suelo un objeto en caída libre desde una altura determinada.

Figura 5.
Aplicación física de las propiedades de los radicales



Nota: Elaboración propia.

La fórmula a utilizar es: $\mathrm{v}=\sqrt{2\mathrm{gh}}$ donde $\mathrm{g}=9,8\ \mathrm{m/s^2}$ y $\mathrm{h}=\sqrt[3]{216}$m es la altura desde la cual se deja caer el objeto. Calcular la velocidad final aplicando las propiedades de los radicales en cada paso del procedimiento.

Solución:

1. Altura inicial

$$\mathrm{h}=\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{27\cdot 8}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{8}=3\cdot 2=6\ \mathrm{m}$$

2. Cálculo de velocidad:

$$\mathrm{v}\,(6)=\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 6}=\sqrt{12\cdot 9.8}=\sqrt{12}\cdot\sqrt{9.8}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{9.8}$$

pero como $\sqrt{9.8}=\sqrt{\dfrac{98}{10}}=\sqrt{\dfrac{49}{5}}=7\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

por tanto: $\mathrm{v}\,(6)=14\dfrac{\sqrt{15}}{5}\approx 10.84\ \mathrm{m/s}$.

Apoyo didáctico: La relevancia de exponentes y radicales se observa también en su papel como puerta de entrada al cálculo diferencial e integral. Apostol (2013) destaca que gran parte de las propiedades de límites y derivadas se apoyan en la manipulación de potencias y raíces, lo que convierte a este epígrafe en un peldaño fundamental para la formación matemática superior. En definitiva, su estudio permite transitar de la aritmética a un pensamiento algebraico más abstracto, preparando el terreno para comprender los fenómenos de cambio y continuidad que se abordan en el cálculo.

Ecuaciones e inecuaciones algebraicas

El origen de las ecuaciones se remonta a las civilizaciones antiguas, mucho antes de que existiera la notación algebraica moderna. Los babilonios (alrededor del 2000 a. C.) resolvían problemas de áreas y volúmenes que hoy traduciríamos en ecuaciones cuadráticas, aunque lo hacían mediante métodos geométricos y procedimientos numéricos. De manera similar, los egipcios empleaban el llamado método de la falsa posición para resolver ecuaciones lineales en problemas relacionados con repartos o cálculos de granos y jornales (Katz, 2009).

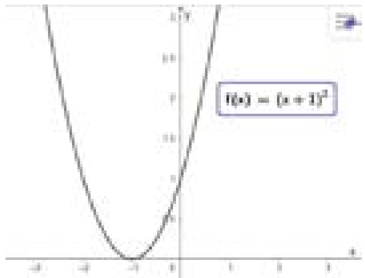
Con la obra de ***Al-Jwārizmī*** en el siglo IX, particularmente su tratado ***Al-kitāb al-mujtaṣar fī ḥisāb al-ŷabr wa-l-muqābala***, la noción de ecuación adquirió una estructura sistemática. En este texto, el matemático persa clasificó y resolvió ecuaciones cuadráticas a través de métodos geométricos, marcando un punto de inflexión en la historia del álgebra (Burton, 2011). Posteriormente, con François Viète en el siglo XVI y René Descartes en el XVII, se consolidó el uso de letras para representar incógnitas y parámetros, lo que permitió formalizar la notación algebraica que utilizamos hasta hoy (Katz, 2009). De esta evolución histórica se desprende que la ecuación no es solo una herramienta matemática, sino también un producto cultural que refleja el avance del pensamiento abstracto.

Trabajar con ecuaciones e inecuaciones no es solo "despejar incógnitas, es aprender a modelar relaciones, contrastar supuestos y decidir con base en evidencias simbólicas y gráficas. Desde una perspectiva histórica, las ecuaciones nacen como respuesta a problemas concretos de reparto, medición y comercio; más tarde se consolidan como lenguaje de la ciencia.

Una ecuación es una igualdad con una o más incógnitas cuyo objetivo es determinar todos los valores que la hacen verdadera. En forma general: $\mathrm{f(x)=g(x)} \Leftrightarrow \mathrm{f(x)-g(x)=0}$. Esta observación sitúa a resolver ecuaciones como un problema de ceros de funciones y, por tanto, enlaza directamente con la interpretación gráfica y con técnicas analíticas y numéricas (Sullivan, 2016; Stewart, 2016) (véase Figura 6).. En el aula, resulta clave distinguir entre identidades (verdaderas para todo x del dominio) y ecuaciones condicionales (verdaderas solo para ciertos x) (Blitzer, 2018).

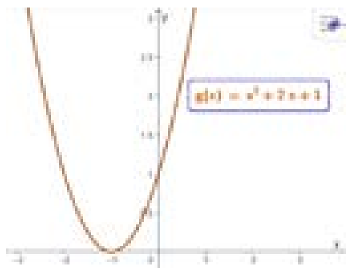
Al desarrollar la igualdad $\mathrm{(x+1)^2}$ obtenemos $\mathrm{x^2+2x+1}$ (véase Figura 7). La igualdad se cumple para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, tal y como se muestra en las figuras siguientes:

Figura 6.
Representación de función cuadrática



Nota: Elaboración propia.

Figura 7.
Representación equivalente de la función $f(x)$

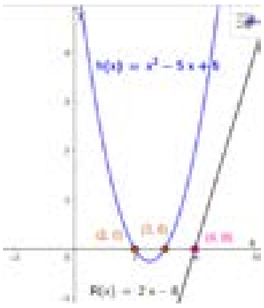


Nota: Elaboración propia.

La ecuación lineal $2x + 3 = 11$ se transforma en $2x = 8$ (véase Figura 8) y tiene como solución $S = \{4\}$. Asimismo, la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ se transforma en $(x - 2)(x - 3) = 0$ y tiene como soluciones $S = \{2, 3\}$.

Para transformar ecuaciones con sentido, se aplican principios de equivalencia. Sumar o restar la misma expresión a ambos lados, o multiplicar y dividir por una cantidad no nula, preserva el conjunto de soluciones. Elevar ambos lados a una potencia par o aplicar funciones no inyectivas puede introducir soluciones extra. Por eso se valida al final sustituyendo en la ecuación original. (Larson & Edwards, 2019; Stewart, 2016).

Figura 8.
Representación de función cuadrática

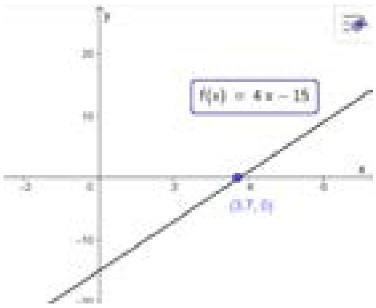


Nota: Elaboración propia.

Tipos frecuentes de ecuaciones

1. **Lineales:** Se resuelven por aislamiento de la incógnita mediante transformaciones elementales. Su interpretación gráfica como rectas facilita el análisis de existencia y unicidad de solución.

Figura 9.
Representación de la función lineal



Nota: Elaboración propia.

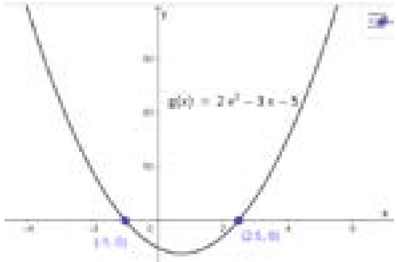
Tabla 2.
Propiedades de las potencias

	Forma general: $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = 0 \ \mathrm{a} \neq 0$
Ejemplo	$3\left(2\mathrm{x} - 1\right) - 5 = 2\mathrm{x} + 7$
Estrategia	Expandir, agrupar términos semejantes y aislar la incógnita.
Resolución	$6\mathrm{x} - 3 - 5 = 2\mathrm{x} + 7$ $\Rightarrow 6\mathrm{x} - 8 = 2\mathrm{x} + 7$ $\Rightarrow 4\mathrm{x} = 15$ $\Rightarrow \mathrm{x} = \frac{15}{4} = 3.75$
Comprobación	Lado izquierdo: $3\left(2 \cdot 3.75 - 1\right) - 5 = 14.5$
	Lado derecho: $2 \cdot 3.75 + 7 = 14.5$

Nota. Elaboración propia.

2. **Cuadráticas:** Completar el cuadrado y la fórmula general no son meros "trucos". Son ventanas conceptuales que conectan álgebra y geometría a través de parábolas, vértices y ejes de simetría. La factorización, cuando es posible, ofrece la vía más directa y conecta con el análisis de signos para inecuaciones asociadas.

Figura 10.
Representación de la función cuadrática



Nota: Elaboración propia.

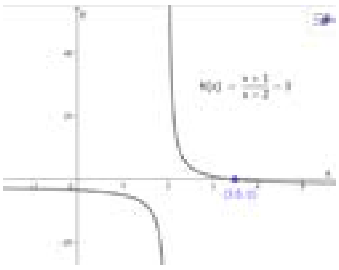
Tabla 3.
Descripción de la forma general de la ecuación cuadrática

	Forma general: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$
Ejemplo	$2x^2 - 3x - 5 = 0$
Estrategia	Aplicar la fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Completar el cuadrado con $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$
Resolución	$x = \frac{3}{4} \pm \frac{7}{4}$ $x = \frac{5}{2};\ x = -1$
Comprobación	Lado izquierdo: $2(-1)^2 + 3\,(-1) + 5 = 0$ Lado derecho: 0 Lado izquierdo: $2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{2}\right) + 5 = 0$ Lado derecho: 0

Nota. Elaboración propia.

3. **Racionales:** Requieren identificar restricciones del dominio, eliminar denominadores con cuidado y verificar raíces "extrañas", "espurias" o no válidas. La representación gráfica con asíntotas ayuda a anticipar el comportamiento y a interpretar resultados.

Figura 11.
Representación de la función racional



Nota: Elaboración propia.

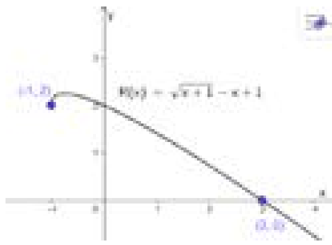
Tabla 4.
Descripción de la forma general de la ecuación racional

	Forma general: $\mathrm{R}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{x})}{\mathrm{Q}(\mathrm{x})},\ \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \neq 0$
Ejemplo	$\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-2} = 3,\ \mathrm{x} \neq 2$
Estrategia	Identificar el dominio, eliminar denominadores y verificar soluciones "extrañas".
Resolución	$\mathrm{x}+1 = 3(\mathrm{x}-2)$ $\mathrm{x}+1 = 3\mathrm{x}-6$ $-2\mathrm{x} = -7$ $\mathrm{x} = 7/2 = 3.5.$
Comprobación	Lado izquierdo: $\frac{\frac{7}{2}+1}{\frac{7}{2}-2} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = 3$ Lado derecho: 3

Nota. Elaboración propia.

4. **Radicales y con valores absolutos:** Implican trabajar con definiciones pieza a pieza. Al resolver |x − a| = b se abordan dos ecuaciones lineales. Las radicales exigen aislar el radical y elevar con cautela, validando al final.

Figura 12.
Representación de la función radical



Nota: Elaboración propia.

Tabla 5.
Descripción de la forma general de la ecuación radical

	Forma general: $\sqrt[n]{F(x)} = G\left(x\right)$ $a\sqrt[m]{F\left(x\right)} + b\sqrt[n]{G\left(x\right)} = H\left(x\right)$ $\sqrt[r]{A\left(x\right)} + \sqrt[s]{B\left(x\right)} = C\left(x\right)$
Ejemplo	$\sqrt{x+1} = x - 1;\ x \geq 1$
Estrategia	Aislar el radical, considerar condiciones de existencia y elevar al cuadrado con validación final.
Resolución	$x + 1 = \left(x - 1\right)^2 = x^2 - 2x + 1$ $x^2 - 3x = 0$ $x\left(x - 3\right) = 0.$ $x = 0$ (No cumple); $x = 3$ (Cumple)
Comprobación	Lado izquierdo: $\sqrt{3+1} = 2$ Lado derecho: $3 - 1 = 2$

Nota: Elaboración propia.

Valor absoluto. $\left|2x - 5\right| = 3$ Desdoblar en dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3 \\ 2x - 5 = -3 \end{cases}$$ **Solución:** $\{1, 4\}$.

Por otra parte, las ecuaciones polinómicas de grado superior a 2 amplían el horizonte de las lineales y cuadráticas porque articulan, en un mismo objeto, estructura algebraica, comportamiento gráfico y técnicas de factorización y aproximación. Enseñarlas no consiste solo en "encontrar raíces", sino en promover una lectura estructural: identificar patrones, reducir la complejidad, estimar cuántas soluciones reales son plausibles y justificar los procedimientos de manera transparente. Este enfoque integra álgebra, análisis y modelación (Apostol, 2013; Anton et al., 2013; Larson & Edwards, 2019).

Desde la historia, los métodos cerrados para cúbicas y cuarticas fueron hitos renacentistas que culminaron en fórmulas generales, mientras que los trabajos de Galois y Abel demostraron la imposibilidad de una fórmula por radicales para el grado cinco en general. Comprender este arco histórico ayuda a situar el valor pedagógico de los métodos cualitativos y numéricos en el aula contemporánea (Katz, 2009; Stillwell, 2010)

Un polinomio $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \mathrm{a_n x^n} + \ldots + \mathrm{a_0} \text{ con } \mathrm{a_n} \neq 0$ define una ecuación $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = 0$. Por el **Teorema Fundamental** del Álgebra, toda ecuación polinómica de grado **"n"** posee **"n"** raíces en el plano complejo, contando multiplicidades. En $\mathbb{R}$, puede haber desde 0 hasta **"n"** raíces reales. La multiplicidad regula el contacto de la gráfica con el eje **"x"**: multiplicidad impar cruza, multiplicidad par toca y regresa. Conjugación compleja: si los coeficientes son reales, las raíces no reales aparecen en pares conjugados (Apostol, 2013; Stewart, 2016).

Estrategias generales de resolución

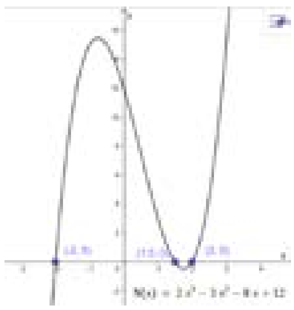
1. **Factorización estructural:** Buscar productos notables, extracción de factor común, agrupación y uso de identidades.

2. **Cambios de variable:** Reducen la ecuación a otra de menor grado o más simple: bicuadráticas $\left(\mathrm{x}^4 \cos \mathrm{x}^2\right)$, ecuaciones recíprocas o palíndromas, simetrías del tipo $\text{tipo } \mathrm{x^n} + \frac{1}{\mathrm{x^{-n}}}$.

3. **Teorema de la raíz racional y división sintética:** Probar candidatos $\pm \frac{\text{divisores } \mathrm{a_0}}{\text{divisores } \mathrm{a_n}}$ y factorizar cuando funciona.

4. **Regla de los signos de Descartes y cotas de raíces:** Estiman número de raíces reales positivas/negativas y acotan su tamaño; útil para decidir dónde buscar.
5. **Métodos cerrados en casos especiales:** Cúbicas y cuárticas admiten fórmulas; didácticamente conviene priorizar estructura y casos prototípicos antes que la técnica completa.
6. **Aproximación numérica:** Bisección, Newton o secante para raíces reales, justificando existencia con continuidad y cambio de signo.
7. **Lectura gráfica y derivadas:** Máximos, mínimos y puntos de inflexión dan claves sobre cantidad y localización de raíces reales (Stewart, 2016; Larson & Edwards, 2019).

Figura 13.
Representación de función radical



Nota: Elaboración propia.

Tabla 6.
Estrategia de resolución de polinomios

Ejemplo	$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$
Estrategia	Buscar candidatos $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}$
Resolución	$x = 2$ anula $\Rightarrow$ factor $(x-2)$ $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x-2)\left(2x^2 + x - 6\right)$ $2x^2 + x - 6 = (2x-3)(x+2)$ **Solución.** $x = 2,\ \frac{3}{2},\ -2$
Comprobación	Lado izquierdo: $2(2)^3 - 3(2)^2 - 8(2) + 12 = 0$ Lado izquierdo: $2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 8(-1) + 12 = 0$ Lado izquierdo: $2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{3}{2}\right) + 12 = 0$

Nota. Elaboración propia.

Inecuaciones algebraicas

Las inecuaciones forman parte esencial del desarrollo del pensamiento algebraico, pues permiten establecer comparaciones, restricciones y condiciones de validez en múltiples situaciones. A diferencia de las ecuaciones, cuyo propósito es determinar los valores exactos que satisfacen una igualdad, las inecuaciones se centran en describir conjuntos de soluciones que cumplen con una relación de desigualdad, ya sea de tipo estricta (<, >) o no estricta (≤, ≥). Esta característica abre la posibilidad de representar gráficamente intervalos y regiones en la recta real o en el plano, lo cual constituye una herramienta fundamental en la modelación matemática (Larson & Edwards, 2019; Stewart, 2016).

El origen de las inecuaciones se vincula con la necesidad de cuantificar límites y rangos.El concepto moderno de desigualdad se consolidó en los siglos XVII y XVIII con el desarrollo del análisis matemático, especialmente con las contribuciones de Euler y Cauchy, quienes establecieron desigualdades fundamentales aplicables a series y funciones (Apostol, 2007).

Tipología de inecuaciones

Las inecuaciones pueden clasificarse según la naturaleza de las expresiones involucradas:

1. **Lineales:** se resuelven de manera similar a las ecuaciones lineales, considerando el cambio de sentido al multiplicar o dividir por un número negativo.
2. **Cuadráticas y polinómicas:** requieren factorización, identificación de raíces y análisis de signos en intervalos.
3. **Racionales:** se analizan considerando tanto las raíces del numerador como las restricciones impuestas por el denominador.
4. **Con valor absoluto:** se descomponen en casos o se interpretan geométricamente como distancias en la recta real.
5. **Exponenciales y logarítmicas:** su resolución se fundamenta en la monotonía de estas funciones y en la restricción de sus dominios.
6. **Trigonométricas:** se trabajan en un período fundamental y luego se generalizan debido a la periodicidad de las funciones (Sullivan, 2016).

Método clásico para resolver inecuaciones polinómicas y racionales

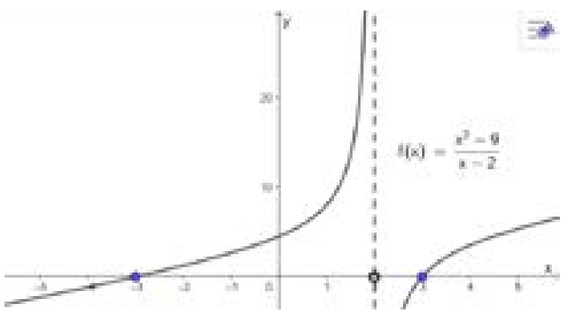
El método clásico para resolver inecuaciones polinómicas y racionales es la tabla de signos, que consiste en:

1. Factorizar la expresión.
2. Determinar los puntos críticos (raíces y discontinuidades).
3. Estudiar el signo de la expresión en cada intervalo.
4. Seleccionar los intervalos que cumplen la condición de desigualdad.

El estudio de las inecuaciones abre la puerta a una concepción más amplia del álgebra, en la que no se busca una solución única, sino un espacio de posibilidades. Esta mirada es esencial para comprender fenómenos del mundo real y para el desarrollo posterior del cálculo y el análisis matemático. (véase Figura 14)

Como señala Schoenfeld (1985) trabajar con inecuaciones impulsa la formación de heurísticas, la capacidad de generalizar y la construcción de un pensamiento matemático flexible.

Figura 14.
Representación de función radical



Nota: Elaboración propia.

Tabla 7.
Estrategia de resolución de inecuaciones polinómicas raciones

	Forma general: $\frac{P(x)}{Q(x)}Q\left(x\right) \neq 0$
Ejemplo	$\frac{x^2-9}{x-2} > 0$
Estrategia	Se determinan los ceros del numerador y del denominador. Estos puntos dividen la recta real en intervalos. Se analiza el signo de la expresión racional en cada intervalo. Finalmente, se seleccionan los intervalos que cumplen la desigualdad planteada.
Resolución	Puntos críticos: $x = -3, 2, 3.$ Solución: $(-3, 2) \cup (3, +\infty)$
Comprobación	Analizar el comportamiento de los signos de $f(x)$ en la recta numérica

Nota: Elaboración propia.

Resolución de problemas con ecuaciones e inecuaciones

La resolución de problemas que involucran ecuaciones e inecuaciones constituye un eje esencial en la formación matemática, ya que permite al estudiante aplicar los conocimientos adquiridos para interpretar y transformar situaciones de la realidad. Sin embargo, más allá de esta estructura clásica, diversos autores han destacado que la resolución de problemas es también un medio para fomentar el pensamiento crítico, la modelación y el desarrollo de competencias argumentativas. En este sentido, el proceso no solo busca hallar una respuesta, sino también promover una actitud investigativa y reflexiva frente al conocimiento matemático.

En el plano didáctico, Schoenfeld (1985) sostiene que resolver problemas no es un proceso lineal, sino una actividad de exploración en la que intervienen heurísticas, control metacognitivo y la disposición del estudiante para perseverar ante la incertidumbre. Así, cuando un alumno enfrenta una ecuación cuadrática en un contexto físico o una inecuación racional en un problema económico, no solo activa algoritmos, sino que pone en juego estrategias cognitivas y actitudes frente al desafío. En la misma línea, Mason, Burton y Stacey (2010) subrayan que el acto de resolver problemas debe entenderse como un proceso creativo, en el cual la formulación del problema y la reflexión sobre los resultados son tan valiosas como la obtención de la solución numérica.

En términos de aplicaciones, Stewart (2016) y Larson y Edwards (2019) destacan que las ecuaciones y las inecuaciones son la base para la modelación de fenómenos físicos y económicos. Por ejemplo, la ecuación exponencial describe procesos de crecimiento poblacional o financiero, mientras que una inecuación puede delimitar el rango de factibilidad en un problema de optimización industrial. Apostol (2013) recuerda que la fuerza de las matemáticas no reside solo en resolver operaciones, sino en traducir relaciones del mundo real a estructuras abstractas y, posteriormente, en interpretar esas abstracciones con sentido práctico.

Desde un enfoque semiótico, Duval (2006) plantea que la comprensión real de una ecuación o inecuación depende de la articulación entre diferentes registros de representación: algebraico, gráfico y tabular. Este planteamiento se traduce en la necesidad de que el estudiante contraste sus soluciones algebraicas con representaciones visuales mediante tecnologías digitales como GeoGebra o Desmos, lo que permite validar los resultados y fortalecer la intuición. En efecto, la visualización gráfica de una inecuación en el plano cartesiano facilita comprender por qué ciertos valores son parte de la solución y otros no, fortaleciendo la idea de restricción y dominio.

Por otro lado, Godino y Batanero (1998) insisten en que la resolución de problemas con ecuaciones e inecuaciones debe concebirse como una práctica cultural y social, ya que el conocimiento matemático se construye en interacción con el entorno y no puede desligarse de sus contextos de uso. Esto implica que el docente debe diseñar problemas significativos vinculados con fenómenos ambientales, sociales o tecnológicos, en lugar de limitarse a ejercicios mecánicos descontextualizados.

Autores como (Kilpatrick et al., 2001) han argumentado que la resolución de problemas a través de ecuaciones e inecuaciones fortalece las cinco dimensiones de la competencia matemática: comprensión conceptual, fluidez procedimental, estrategias de resolución, razonamiento adaptativo y disposición productiva. En otras palabras, un estudiante que trabaja con este tipo de problemas no solo aprende a resolver, sino también a pensar matemáticamente, a justificar y a transferir conocimientos a nuevas situaciones.

En este sentido, la resolución de problemas en el aula no debe entenderse como una simple actividad cognitiva, sino como una oportunidad para reflexionar sobre el mundo y transformarlo. Resolver una inecuación, por ejemplo, puede convertirse en una experiencia significativa cuando el problema representa una situación social concreta, como la distribución desigual de recursos o las diferencias de oportunidades entre comunidades. En ese proceso, el estudiante deja de ser un receptor pasivo y se transforma en un sujeto crítico que interpreta, cuestiona y propone.

Estrategias frecuentes para resolver problemas
En la práctica educativa, las estrategias para resolver problemas con ecuaciones e inecuaciones no se limitan a la aplicación de algoritmos, sino que constituyen procesos de pensamiento que integran comprensión conceptual, razonamiento lógico y uso de herramientas diversas. A continuación, se profundiza en cada una de las estrategias presentadas:

Modelación algebraica: la modelación algebraica es el paso inicial para traducir una situación verbal en una expresión simbólica. Según Blum y Leiss (2007), modelar implica construir un puente entre el mundo real y el lenguaje matemático, lo cual requiere identificar las variables, establecer relaciones y formular la ecuación o inecuación correspondiente. Por ejemplo, al expresar que "el doble de un número menos cinco es igual a siete", el estudiante debe reconocer que el número desconocido es la variable **"x"**, y que la relación se expresa como $2x - 5 = 7$.

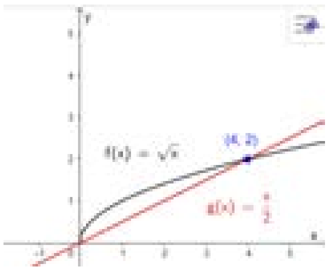
El lenguaje natural presenta diversas formas que los estudiantes deben aprender a interpretar:

1. **Comparaciones y relaciones verbales:** expresiones como "es igual a", "es mayor que" o "es menor que" corresponden a los símbolos matemáticos =, > o <. Por ejemplo, "la edad de Ana es mayor que la de Pedro" puede representarse como a > p.
2. **Operaciones implícitas:** frases como "el doble de un número", "la tercera parte de una cantidad" o "un número aumentado en cinco" se transforman en expresiones algebraicas como $2x, \frac{1}{3}xy\ ox + 5$. En este caso, la comprensión de multiplicación, división y suma se traduce desde estructuras lingüísticas coloquiales.
3. **Secuencias temporales o condicionales:** enunciados como "dentro de tres años" o "si se descuenta un 10 %" se expresan como $x + 3o0.9x$. Aquí, el lenguaje cotidiano conlleva transformaciones algebraicas que implican operaciones sobre la variable.
4. **Problemas narrativos:** cuando el enunciado incluye una situación más extensa, como "la suma de dos números consecutivos es igual a 20", el estudiante debe reconocer que los números pueden representarse como $xyx + 1$, y formular la ecuación $x + (x + 1) = 20$.

De esta manera, la modelación algebraica, apoyada en el análisis del lenguaje natural, no solo fortalece la destreza de traducir enunciados a expresiones, sino que también muestra al estudiante que el álgebra es un medio para representar fenómenos de su entorno cotidiano. Como sostiene Godino y Batanero (1998), comprender las formas de representación y los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos resulta clave para lograr aprendizajes significativos.

Análisis gráfico: el análisis gráfico permite visualizar las soluciones de ecuaciones e inecuaciones a través de la representación de funciones en el plano cartesiano.

Figura 15.
Representación de función radical



Nota: Elaboración propia.

Duval (2006) destaca que la conversión entre registros semióticos es esencial para consolidar la comprensión. En el caso de una inecuación cuadrática, la interpretación del signo de la parábola asociada posibilita identificar intervalos de validez sin necesidad de cálculos extensos. Además, la gráfica ofrece una verificación inmediata: el estudiante puede contrastar si los resultados algebraicos corresponden con las zonas del plano que satisfacen la condición.

Métodos de factorización y sustitución: La factorización es un proceso importante en matemáticas, puesto que se puede usar para reducir el estudio de una expresión complicada al estudio de varias expresiones más sencillas. Por ejemplo, las propiedades del polinomio $\mathrm{x}^2 - 9$ se pueden determinar al examinar los factores $(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}+3)$.

Estos métodos constituyen estrategias algebraicas que favorecen la simplificación de expresiones y la resolución de sistemas. Según Stewart (2016), la factorización no es solo una técnica operativa, sino un procedimiento que revela la estructura interna de los polinomios, facilitando la identificación de raíces.

La sustitución, por su parte, permite reducir problemas complejos a expresiones más simples, un recurso fundamental en sistemas de ecuaciones o en expresiones que requieren pasos intermedios. Su uso desarrolla en el estudiante la capacidad de reconocer patrones y aplicar propiedades algebraicas con flexibilidad.

Suele ser difícil factorizar polinomios de grado mayor a 2. En casos sencillos, pueden ser útiles las siguientes fórmulas para factorizar.

Tabla 8.
Fórmulas de factorización

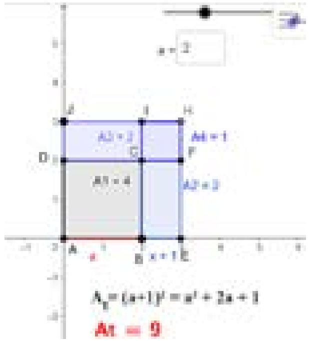
Fórmula	Ejemplos
Diferencia de dos cuadrados $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	$9a^2 - 25 = (3a + 5)(3a - 5)$
Diferencia de dos cubos $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$27m^3 - 64 = (3m)^3 - 4^3 = (3m - 4)(9m^2 + 12m + 16)$
Suma de cubos $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$8a^3 + 125 = (2a)^3 + 5^3 = (2a + 5)(4a^2 - 10a + 25)$

Nota. Elaboración propia

Apoyo tecnológico: el uso de tecnologías digitales amplifica las posibilidades de análisis y verificación. Herramientas como GeoGebra o Desmos permiten representar gráficamente funciones, comprobar soluciones y explorar de manera interactiva los efectos de variar parámetros. Godino y Batanero (1998) resaltan que el software no debe concebirse solo como un medio de cálculo, sino como un entorno para la experimentación y la construcción de significados. Al integrar tecnología, el estudiante desarrolla habilidades de visualización y adquiere confianza al constatar que sus procedimientos algebraicos coinciden con la representación gráfica.

Estas plataformas no solo permiten representar conceptos de forma dinámica, sino que también invitan a experimentar, conjeturar y comprobar ideas de manera autónoma. En este sentido, Pierce y Stacey (2010) destacan que los programas de análisis matemático ofrecen oportunidades pedagógicas únicas, ya que facilitan la exploración de relaciones entre expresiones algebraicas, gráficas y numéricas, generando un espacio de aprendizaje más interactivo y significativo. Integrar este tipo de recursos en el aula contribuye a fortalecer la comprensión conceptual y la motivación de los estudiantes frente a la matemática.

Figura 16.
Representación en Geogebra de una suma al cuadrado



Nota. Elaboración propia

La incorporación de tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas no consiste simplemente en trasladar los ejercicios del papel a una pantalla. Supone, más bien, repensar la forma en que los estudiantes construyen y comunican sus ideas. En este proceso, el rol del docente es decisivo, porque no se trata solo de usar un programa, sino de guiar al estudiante hacia un uso reflexivo y significativo de la herramienta. Laborde (2002) explica que la integración tecnológica exige una mediación pedagógica que combine el conocimiento matemático con el conocimiento instrumental, de modo que el software se convierta en un medio para explorar, visualizar y comprender los conceptos, y no en un fin en sí mismo.

Además, investigaciones recientes muestran que los entornos digitales estimulan la motivación intrínseca y el aprendizaje activo, en tanto sitúan al alumno como protagonista en la exploración y construcción de saberes (Pierce & Stacey, 2010). La incorporación de estas herramientas contribuye, así, a una educación matemática más significativa, que fomenta tanto la comprensión conceptual como la autonomía en la resolución de problemas.

Tipología de ejercicios para ecuaciones e inecuaciones

La enseñanza de las ecuaciones e inecuaciones adquiere sentido cuando los ejercicios propuestos no se limitan a la repetición mecánica, sino que se convierten en experiencias formativas que movilizan distintas dimensiones de la competencia matemática. La literatura especializada subraya que una tipología diversa de actividades permite transitar de lo simple a lo complejo, y de lo cerrado a lo abierto, favoreciendo tanto el dominio técnico como la capacidad de interpretar y modelar fenómenos reales (Kilpatrick et al, 2001; Godino, Batanero & Font, 2007).

1. Ejercicios de traducción del lenguaje natural al algebraico

Los ejercicios de traducción del lenguaje natural al algebraico son fundamentales porque ayudan al estudiante a pasar de la intuición verbal a la precisión simbólica. En este tipo de tareas, la persona debe identificar relaciones, cantidades y condiciones dentro de una situación descrita con palabras, y luego expresarlas mediante expresiones, ecuaciones o funciones.

Tabla 9.
Ejemplos de ejercicios de traducción del lenguaje natural al algebraico

#	Enunciado	Expresión matemática	Variables
1	La suma de tres veces un número y el doble de otro número es igual a veinte.	$3x + 2y = 20$	(x, y): números reales
2	La edad de Ana aumentada en cinco años equivale al doble de la edad de su hermano.	$a + 5 = 2h$	(a): edad de Ana; (h): edad del hermano
3	El triple de un número disminuido en cuatro es igual a ese número aumentado en ocho.	$3x - 4 = x + 8$	(x): número real
4	Si a la mitad de un número le agregamos siete, obtenemos quince.	$\frac{x}{2} + 7 = 15$	(x): número real
5	La diferencia entre el cuadrado de un número y seis es igual a ese mismo número.	$x^2 - 6 = x$	(x): número real

Nota. Elaboración propia

Apoyo didáctico: Se sugiere al docente trabajar con ejercicios de traducción del lenguaje natural al algebraico para que los estudiantes aprendan a identificar variables y relaciones presentes en situaciones cotidianas y expresarlas en forma de ecuaciones o inecuaciones.

Esta práctica favorece la comprensión del álgebra como un lenguaje de representación y modelación, y no como un conjunto de símbolos abstractos. Tal como señala Duval (2006), la conversión entre registros verbales y algebraicos resulta clave para superar las dificultades de comprensión y dar significado a los objetos matemáticos.

2. Ejercicios procedimentales y algorítmicos

Los ejemplos de ejercicios procedimentales y algorítmicos son importantes porque ayudan al estudiante a "ver" cómo se mueve una idea matemática cuando pasa del papel a la acción. No se trata solo de seguir pasos, sino de entender por qué cada movimiento tiene sentido y cómo ese proceso se convierte en una herramienta que después puede aplicar en otras situaciones. Además, estos ejercicios sirven como puente entre la teoría y la práctica: permiten que conceptos que a veces parecen abstractos se vuelvan más concretos, más cercanos y, sobre todo, más útiles en su propio aprendizaje.

Tabla 10.

Ejemplos de ejercicios procedimentales y algorimiticos

#	Enunciado	Expresión matemática	Tipo
1	Encuentra el número que, al multiplicarlo por 2 y sumarle 5, da como resultado 11.	$2x + 5 = 11$	Lineal
2	Halla los valores de (x) cuyo cuadrado, al restarle 5 veces el número y sumarle 6, da cero.	$x^2 - 5x + 6 = 0$	Cuadrática
3	Determina los números cuya distancia al 3 en la recta real no supera 4 unidades.	$\lvert x - 3 \rvert \leq 4$	Valor absoluto
4	Encuentra los valores de (x) que anulan el polinomio de tercer grado dado.	$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$	Polinómica
5	Resuelve para qué valores de (x) la fracción $\frac{x+2}{x+1}$ resulta positiva.	$\frac{x+2}{x+1} > 0$	Racional

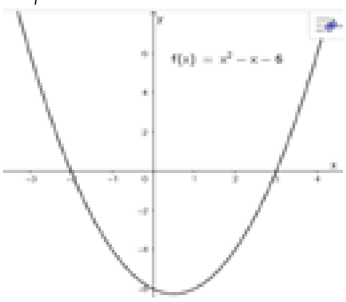
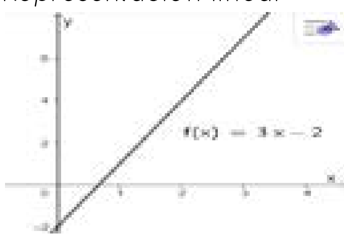
Nota. Elaboración propia

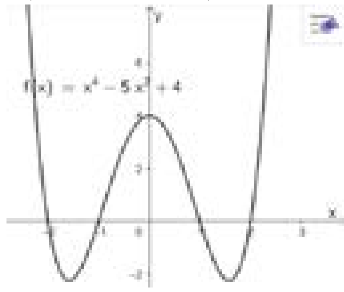
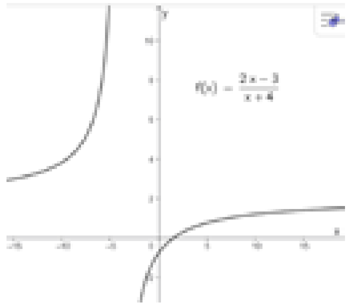
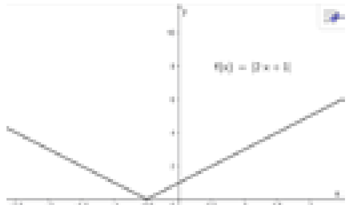
Apoyo didáctico: Se recomienda al profesor proponer ejercicios procedimentales y algorítmicos que fortalezcan la destreza en la manipulación simbólica y el dominio de reglas algebraicas. Resolver ecuaciones lineales, cuadráticas o inecuaciones racionales permite a los estudiantes afianzar la fluidez procedimental necesaria para enfrentar problemas más complejos. Como destacan Hiebert y Lefevre (1986), la práctica sistemática de estos procedimientos debe acompañarse de comprensión conceptual, evitando que el aprendizaje se reduzca a la mera aplicación mecánica de algoritmos.

3. Ejercicios de análisis gráfico y verificación

Los ejercicios de análisis gráfico y verificación son fundamentales porque permiten que el estudiante contraste lo que calcula con lo que observa, creando una relación más clara entre el procedimiento algebraico y su representación visual. Al detenerse a revisar un gráfico, el estudiante confirma si su resultado tiene sentido, si la pendiente coincide, si el punto realmente pertenece a la curva o si el comportamiento de la función refleja lo que esperaba.

Tabla 11.
Ejemplos de ejercicios de análisis gráfico

#	Enunciado	Expresión matemática	Tipo de ecuación
1	Determina gráficamente la región donde la parábola está por encima del eje x.	$x^2 - x - 6 \geq 0$	*Figura 17.* *Representación cuadrática*  Nota: Elaboración propia.
2	Representa gráficamente la recta y determina dónde su valor es mayor que 4.	$3x - 2 > 4$	*Figura 18.* *Representación lineal*  Nota: Elaboración propia.

3	Analiza gráficamente cuándo el polinomio de cuarto grado es no negativo.	$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$	*Figura 19.* *Representación polinomial*  Nota: Elaboración propia.
4	Determina gráficamente para qué valores de (x) la fracción es menor que cero.	$\frac{2x-3}{x+4} < 0$	*Figura 20.* *Representación polinomial*  Nota: Elaboración propia.
5	Representa gráficamente y determina la solución de la inecuación con valor absoluto.	$\lvert 2x+1 \rvert \geq 5$	*Figura 21.* *Representación valor absoluto*  Nota: Elaboración propia

Nota. Elaboración propia

Apoyo didáctico: Se recomienda al profesor integrar ejercicios de análisis gráfico y verificación para que los estudiantes contrasten las soluciones algebraicas con representaciones visuales. Al trabajar con ecuaciones e inecuaciones en el plano cartesiano, se favorece la validación de resultados y se refuerza la comprensión conceptual al articular distintos registros de representación, como subraya Duval (2006). De este modo, los alumnos no solo aplican procedimientos, sino que aprenden a verificar y dar sentido a las soluciones obtenidas.

4. Ejercicios de aplicación contextualizada

Los ejercicios de aplicación contextualizada son valiosos porque conectan la matemática con situaciones reales que el estudiante reconoce y comprende. Cuando un problema surge de un escenario cercano el aprendizaje deja de ser únicamente simbólico y se vuelve significativo.

Estos ejercicios permiten que el estudiante intuya para qué sirven los conceptos, cómo se usan y por qué es útil dominarlos. Además, al enfrentarse a contextos más abiertos y variados, desarrolla la capacidad de seleccionar estrategias, justificar decisiones y adaptar los conocimientos matemáticos a situaciones nuevas.

Tabla 12.
Ejemplos de ejercicios de aplicación contextualizada

#	Enunciado	Expresión matemática	Tipo de ecuación
1	Una empresa produce (x) artículos. Los ingresos son $\mathrm{I(x)} = 20\mathrm{x}$ y los costos $\mathrm{C(x)} = 15\mathrm{x} + 200$.¿Cuántos artículos debe vender para que los ingresos igualen a los costos?	$20\mathrm{x} = 15\mathrm{x} + 200$	Lineal
2	La altura de un objeto lanzado desde el suelo sigue $\mathrm{h(t)} = -5\mathrm{t}^2 + 20\mathrm{t}$. ¿En qué momentos está en el suelo?	$-5\mathrm{t}^2 + 20\mathrm{t} = 0$	Cuadrática
3	Una cooperativa reparte beneficios según $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+2}$ donde (x) son las aportaciones en miles de dólares. ¿Para qué valores de x el beneficio es al menos 0,5?	$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+2} \geq 0.5$	Racional
4	La ganancia (en miles de USD) se modela por $\mathrm{G(x)} = \mathrm{x}^3 - 6\mathrm{x}^2 + 11\mathrm{x} - 6$. ¿Para qué niveles de ventas la ganancia es cero (puntos de equilibrio)?	$\mathrm{x}^3 - 6\mathrm{x}^2 + 11\mathrm{x} - 6 = 0$	Cúbica
5	a población de un pueblo es 5000 y aumenta 200 personas por año. ¿En qué año superará los 10000 habitantes?	$5000 + 200\mathrm{t} \geq 10000$	Lineal

Nota: Elaboración propia.

Apoyo didáctico: Se sugiere al profesor proponer ejercicios de aplicación contextualizada que acerquen las ecuaciones e inecuaciones a situaciones reales como cálculos de costos, beneficios o tiempos de proceso. Estos problemas, además de motivar, favorecen la modelación matemática y la comprensión conceptual, permitiendo que los estudiantes vean el valor del álgebra en contextos auténticos (Blum & Leiss, 2007; Godino, Batanero & Font, 2007).

5. Ejercicios exploratorios y abiertos

Los ejercicios exploratorios y abiertos son esenciales porque invitan al estudiante a pensar más allá de una única respuesta posible y a moverse con mayor libertad dentro de las ideas matemáticas. En lugar de seguir un camino ya marcado, estos ejercicios le permiten probar, comparar, equivocarse, ajustar y volver a intentar, desarrollando una forma de razonamiento más flexible y creativa. Cuando el estudiante descubre patrones por sí mismo o encuentra diferentes maneras de abordar una misma situación, siente que la matemática no es un conjunto rígido de reglas, sino un espacio donde puede formular preguntas y tomar decisiones. Este tipo de tareas despierta curiosidad, fomenta la autonomía intelectual y ayuda a construir una comprensión más profunda y personal de los conceptos.

Apoyo didáctico: Se sugiere al docente incorporar en la planificación **ejercicios exploratorios** que permitan a los estudiantes abordar un mismo problema desde diferentes enfoques, fomentando así la creatividad y el pensamiento flexible. Este tipo de tareas no debe reducirse a la búsqueda de una única respuesta, sino que ha de propiciar la reflexión sobre los procedimientos empleados, la comparación de estrategias y la justificación de decisiones. Como señalan Mason, Burton y Stacey (2010), los ejercicios abiertos estimulan la autonomía intelectual y el razonamiento adaptativo, al invitar al alumno a experimentar con distintas rutas de solución y a construir confianza en sus propias capacidades matemáticas.

Tabla 13.
Ejemplos de ejercicios exploratorios y abiertos

#	Enunciado	Expresión matemática	Tipo
1	Encuentra todos los pares de números consecutivos cuya multiplicación sea igual a 72. ¿Existen distintas formas de comprobarlo?	$x(x+1)=72)$	Cuadrática
2	Propón distintos valores de (x)que cumplan que la diferencia entre su cuadrado y el doble del número sea menor que 15. ¿Qué estrategias puedes usar para justificar tu elección?	$x^2-2x<15$	Inecuación cuadrática
3	Explora los valores de (x) que hacen que la fracción $\frac{2x-5}{x+1}$sea mayor que 3. ¿Cómo puedes representarlo numérica o gráficamente?	$\frac{2x-5}{x+1}>3$	Inecuación racional
4	Investiga qué valores de (x) cumplen que la raíz cuadrada de $(x+3)$ sea igual a $(x-1)$. ¿Cómo verificarías tus soluciones?	$\sqrt{x+3}=x-1$	Radical
5	Describe y representa los números cuya distancia al 7 en la recta real no supere 4 unidades. ¿De qué maneras diferentes se puede interpretar esta condición?	$\lvert x-7\rvert\leq 4$	Valor absoluto

Nota: Elaboración propia.

6. Ejercicios con apoyo tecnológico

Los ejercicios con apoyo tecnológico ofrecen al estudiante una forma más dinámica y visual de interactuar con las ideas matemáticas. Al utilizar herramientas como GeoGebra, calculadoras gráficas o simuladores, puede experimentar con parámetros, observar cambios en tiempo real y comprobar rápidamente si sus conjeturas tienen sentido. Esta interacción inmediata favorece la comprensión, ya que permite explorar situaciones que, de manera tradicional, serían más lentas o difíciles de representar. Además, la tecnología amplía las posibilidades de análisis: ayuda a verificar resultados, comparar métodos y visualizar comportamientos que fortalecen la intuición matemática. De este modo, la tecnología no reemplaza el razonamiento, sino que actúa como un medio para profundizarlo y hacerlo más accesible.

Tabla 14.
Ejemplos de ejercicios con apoyo tecnológico

#	Enunciado	Ideas de solución / Caminos posibles	Preguntas guía
1	Una empresa de mensajería cobra 7 dólares de tarifa fija y 2 dólares por cada paquete. Si el presupuesto máximo es 19 dólares, ¿cuántos paquetes pueden enviarse?	Algebra: resolver $2x + 7 = 19$ Gráfico: intersección de $y = 2x + 7 \text{ con } y = 19$	¿Qué significa el punto de intersección? ¿Qué ocurre si el presupuesto cambia?
2	Una pelota sigue la trayectoria $h(x) = x^2 - 5x + 6.$. ¿En qué distancias toca el suelo? ¿Cómo cambia la parábola si modificas los coeficientes?	Factorización, completar el cuadrado, fórmula general. Gráfico de la parábola y raíces. Extensión: usar deslizadores en a, b, c.	¿Qué representa cada intersección con el eje x? ¿Cómo se interpreta el vértice?
3	Se estudia el índice de rendimiento $R(x) = \frac{x-2}{x+3}$ Determina en qué intervalos el rendimiento es positivo.	Línea de signos: analizar raíces y asíntota. Gráfico: observar dónde la curva está sobre el eje x. Extensión: generalizar a $\frac{x-p}{x+q}$	¿Por qué $x = -3$ no pertenece al dominio? ¿Qué intervalos generan $R(x) > 0$?
4	Un sensor mide $d = \sqrt{x+1}$ y un planificador predice $p = x - 3$ Encuentra los valores de x donde coinciden ambos modelos y verifica raíces extrañas.	Algebra: elevar al cuadrado, resolver y comprobar. Gráfico: intersección de $y = \sqrt{x+1} \text{ con } y = x - 3.$	¿Qué condiciones de dominio deben cumplirse? ¿Siempre hay solución?
5	En una evaluación de matemáticas, la calificación objetivo es de 8/10. Se acepta una tolerancia de hasta 6 décimas $(\pm 0,6)$ para considerar que el estudiante está dentro del rango esperado.	$\lvert x - 8 \rvert \leq 0.6$	Representa gráficamente todas las calificaciones posibles que cumplen con este criterio y determina el intervalo de aceptación.

Nota: Elaboración propia.

Apoyo didáctico: Se recomienda al docente integrar recursos tecnológicos como GeoGebra o Desmos no solo para agilizar cálculos, sino para promover espacios de experimentación que fortalezcan la comprensión conceptual y permitan validar resultados de manera interactiva. Tal como señalan Godino y Batanero (1998), estas herramientas favorecen la construcción de significados matemáticos, mientras que Duval (2006) destaca su valor en la articulación de distintos registros de representación.

Conclusiones

El recorrido por este primer capítulo permite comprender que el álgebra no es solo una colección de reglas o procedimientos, sino un modo de pensar que posibilita organizar, simbolizar y comprender la realidad desde la lógica de las relaciones. El estudio de los números reales, sus propiedades, los exponentes y radicales, así como la resolución de ecuaciones e inecuaciones, sienta las bases para una comprensión más profunda del cálculo y de la modelación matemática.

De igual manera, la propuesta didáctica que acompaña el desarrollo teórico resalta la importancia de enseñar el álgebra desde la comprensión y no desde la mera repetición. Los ejemplos, las estrategias de resolución y el uso de recursos tecnológicos permiten visualizar las ecuaciones e inecuaciones como herramientas para interpretar y transformar el entorno. De esta forma, el capítulo invita al docente y al estudiante a descubrir en el álgebra un camino hacia el razonamiento, la creatividad y la reflexión crítica, donde aprender a resolver es también aprender a pensar con sentido.

Referencias

Apostol, T. M. (2007). Cálculo. Volumen I: Cálculo de una variable, con introducción al álgebra lineal (2.ª ed.). Wiley. (Trabajo original publicado en 1967).

Apostol, T. M. (2013). Análisis matemático (2.ª ed.). Addison-Wesley.

Blitzer, R. (2018). Álgebra y trigonometría (6.ª ed.). Pearson.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). Cómo los estudiantes y profesores abordan problemas de modelización. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), Modelización matemática (ICTMA12): Educación, ingeniería y economía (pp. 222–231). Horwood Publishing.

Burton, D. M. (2011). Teoría elemental de números (7.ª ed.). McGraw-Hill.

Crandall, R., & Pomerance, C. (2005). Números primos: Una perspectiva computacional (2.º ed.). Springer.

Duval, R. (2006). Un análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Godino, J. D., y Batanero, C. (1998). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Universidad de Granada

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education.

Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). An introduction to the theory of numbers (6th ed.). Oxford University Press.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: Un análisis introductorio. En J. Hiebert (Ed.), Conocimiento conceptual y procedimental: El caso de las matemáticas (pp. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates.

Katz, V. J. (2009). Historia de las matemáticas: Una introducción (3.º ed.). Addison-Wesley.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Sumando logros: Cómo aprenden matemáticas los niños. National Academy Press.

Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3), 283–317. https://doi.org/10.1023/A:1013309728825

Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). Calculus of a single variable (12th ed.). Cengage Learning

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). Pensar matemáticamente (2.º ed.). Pearson.

Pierce, R., & Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15(1), 1–20. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9158-6

Ribenboim, P. (2016). The Book of Prime Number Records (5th ed.). Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). Resolución de problemas matemáticos. Academic Press.

Stewart, J. (2016). Cálculo: Trascendentes tempranas (8.º ed.). Cengage Learning.

Stillwell, J. (2010). Mathematics and its History (3rd ed.). Springer.

Sullivan, M. (2016). Álgebra y trigonometría (10.º ed.). Pearson.

Capítulo II

Sistemas de ecuaciones e inecuaciones algebraicas

Introducción

En este segundo capítulo, dedicado a los sistemas de ecuaciones e inecuaciones algebraicas, el estudiante se enfrenta al reto de analizar situaciones donde varias condiciones actúan al mismo tiempo. No se trata solo de resolver igualdades o desigualdades aisladas, sino de descubrir cómo interactúan entre sí para definir un punto común, una región o un equilibrio. Este paso desde lo individual hacia lo relacional representa un avance en la madurez algebraica: el pensamiento deja de mirar ecuaciones por separado y aprende a verlas como parte de un entramado de relaciones que modelan fenómenos del mundo real.

En este contexto, los sistemas se convierten en un lenguaje para describir simultáneamente varias realidades: el cruce de dos caminos, la intersección de demandas y recursos, o el punto donde se equilibran fuerzas opuestas. Resolverlos exige articular razonamiento simbólico, interpretación gráfica y sentido numérico, combinando lo analítico con lo visual. Las estrategias clásicas (sustitución, igualación o reducción) cobran un nuevo valor cuando se interpretan como expresiones de un mismo principio de coherencia: todo sistema busca un punto donde las condiciones se armonizan. El apoyo de herramientas tecnológicas como GeoGebra o Desmos permite, además, visualizar esa convergencia, haciendo tangible la idea de solución como encuentro entre representaciones distintas de una misma verdad matemática.

Este capítulo no pretende limitarse a la técnica, sino invitar al lector a pensar el sistema como metáfora del propio conocimiento: un espacio donde múltiples caminos convergen para dar sentido a una misma realidad. Cada método, cada representación y cada verificación aportan una mirada diferente, pero complementaria. De este modo, el estudio de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones se presenta como un ejercicio de pensamiento integrador, que prepara el camino para los capítulos siguientes, donde las funciones algebraicas y trascendentes revelarán su poder para describir, con elegancia y precisión, los patrones y leyes que rigen la naturaleza y la sociedad.

Fundamentos conceptuales

El estudio de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones constituye un eje central en la formación algebraica, ya que permite trabajar con situaciones donde intervienen varias condiciones de manera simultánea. En términos generales, un sistema de ecuaciones se compone de dos o más ecuaciones que deben resolverse al mismo tiempo para encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen todas ellas. De forma paralela, un sistema de inecuaciones está formado por desigualdades cuya solución corresponde a un conjunto de valores o regiones que cumplen las condiciones establecidas. Estos sistemas, como señalan Stewart (2016) y Blitzer (2018), no solo constituyen un recurso algebraico, sino también un lenguaje formal para representar y analizar fenómenos complejos de la realidad.

En lo que respecta a su clasificación, los sistemas se dividen en lineales y no lineales. Los sistemas lineales se caracterizan por la presencia de ecuaciones o inecuaciones de primer grado, cuyas gráficas corresponden a rectas en el plano o hiperplanos en dimensiones superiores. Este tipo de sistemas resulta de gran importancia porque ofrece soluciones que pueden interpretarse como puntos de intersección de rectas, vértices de polígonos o regiones poligonales. Por otro lado, los sistemas no lineales incluyen expresiones cuadráticas, cúbicas, radicales o de otro tipo, cuyas soluciones adoptan formas más complejas: curvas, parábolas, circunferencias o incluso superficies en el espacio tridimensional. Esta diversidad de casos hace que los estudiantes deban desarrollar tanto la destreza algorítmica como la capacidad de interpretar gráficas y regiones solución (Sullivan, 2016).

Otro aspecto clave en la comprensión de los fundamentos es la discusión sobre los tipos de soluciones. Un sistema puede ser:

- **Compatible determinado,** cuando presenta una única solución que satisface todas las condiciones;
- **Compatible indeterminado**, cuando tiene infinitas soluciones que cumplen el sistema;
- **Incompatible**, cuando no existe ningún valor que satisfaga simultáneamente todas las expresiones.

Este análisis es esencial, pues ayuda al estudiante a entender que resolver un sistema no siempre implica encontrar un único resultado numérico, sino también reconocer situaciones de imposibilidad o de múltiples soluciones (Anton et al. , 2013).

La importancia de los sistemas en la modelación matemática se evidencia en numerosos campos. En economía, los sistemas lineales permiten calcular el punto de equilibrio entre costos e ingresos; en física, se aplican para determinar el punto de intersección de trayectorias o fuerzas; en biología, ayudan a describir el crecimiento poblacional bajo restricciones; y en ingeniería, son la base de modelos de optimización y programación lineal. En este sentido Kilpatrick et al. (2001) destacan que este tipo de problemas favorece el desarrollo integral de las competencias matemáticas, al exigir comprensión conceptual, fluidez procedimental, estrategias de resolución, razonamiento adaptativo y disposición productiva.

En el ámbito educativo, comprender los fundamentos de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones supone, además, formar en el pensamiento algebraico como herramienta de modelación. No se trata solo de manipular símbolos, sino de ofrecer a los estudiantes la oportunidad de interpretar situaciones, plantear modelos y validar sus soluciones en diferentes contextos. Así, los fundamentos conceptuales de este tema constituyen no solo un contenido matemático, sino también una vía para fortalecer la autonomía intelectual, la capacidad crítica y la transferencia del conocimiento a escenarios de la vida real.

Definición de sistemas de ecuaciones e inecuaciones

Un sistema de ecuaciones algebraicas puede entenderse como un conjunto finito de ecuaciones en las que intervienen las mismas incógnitas y que deben cumplirse de manera simultánea. La resolución de un sistema busca determinar los valores de las variables que satisfacen todas las condiciones propuestas. Este concepto se generaliza de forma natural a partir de la idea de una sola ecuación: mientras que en una expresión aislada se procura identificar los valores que verifican una igualdad, en un sistema se requiere encontrar las soluciones comunes a todas ellas. Según

Stewart (2016), esta interacción simultánea convierte a los sistemas en una herramienta fundamental para modelar situaciones reales que no pueden explicarse con una sola ecuación.
La forma general de un sistema de ecuaciones lineales con **"m"** ecuaciones y **"n"** incógnitas se puede expresar como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

donde los coeficientes a_{ij} y los términos independientes b_{ij} son números reales. Este planteamiento, abordado de manera sistemática por Blitzer (2018) y Anton et al. (2013), permite tratar sistemas sencillos de dos variables hasta sistemas de mayor dimensión que se resuelven mediante métodos matriciales.
Por otra parte, un sistema de inecuaciones algebraicas se define como el conjunto de desigualdades en las que aparecen las mismas incógnitas, y cuya solución corresponde a los valores que satisfacen simultáneamente todas las restricciones. Su forma general puede escribirse como:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_2 \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_m \end{cases}$$

donde cada f_{ij} es una expresión algebraica en varias variables. Estas representaciones generan, en el plano o en el espacio, regiones factibles que reflejan las soluciones posibles. Como señala Sullivan (2016), la interpretación gráfica de los sistemas de inecuaciones es esencial, pues permite visualizar áreas de validez que constituyen la base de la programación lineal y de múltiples aplicaciones en ciencias económicas y de la ingeniería.

En síntesis, los sistemas de ecuaciones e inecuaciones algebraicas constituyen un marco conceptual amplio para trabajar con situaciones en las que interactúan múltiples condiciones. Su estudio no solo fortalece las habilidades algebraicas, sino que también impulsa competencias superiores, como el razonamiento adaptativo y la capacidad de modelación (Kilpatrick et al., 2001).

Clasificación: lineales y no lineales

La clasificación de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones en lineales y no lineales constituye un aspecto esencial del álgebra, ya que determina tanto los métodos de resolución como la forma en que se interpretan las soluciones. Esta distinción no es meramente formal, sino que responde a la necesidad de organizar y comprender los diferentes tipos de relaciones que pueden establecerse entre variables. Como señalan Anton et al.(2013), reconocer si un sistema es lineal o no lineal permite elegir las estrategias adecuadas de resolución y facilita la transición del cálculo simbólico a la interpretación geométrica y aplicada.

Un sistema lineal está compuesto por ecuaciones en las que las variables aparecen con exponente uno y no se multiplican entre sí. Su forma general en dos incógnitas es:

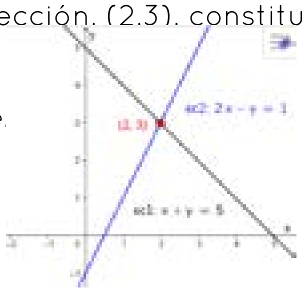
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Gráficamente, este sistema representa dos rectas en el plano, cuya intersección corresponde a la solución. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

La primera ecuación describe una recta que pasa por los puntos (0,5) y (5,0), mientras que la segunda se representa como una recta que corta al eje “y” en (-1) y al eje “x” en (0.5) (véase Figura 1). Su punto de intersección, (2.3), constituye la solución única.

Figura 1.
Representación del siste



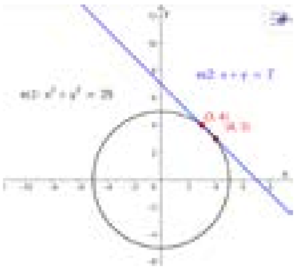
Nota: Elaboración propia.

Según Stewart (2016), este enfoque permite a los estudiantes comprender que la resolución de un sistema lineal equivale a encontrar un punto común que satisface ambas condiciones. En contraste, un sistema no lineal incluye al menos una ecuación o inecuación en la que las variables aparecen elevadas a exponentes distintos de uno, o se presentan en productos, raíces u otras formas algebraicas. Un ejemplo clásico en dos variables es:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

La primera ecuación representa una circunferencia de radio 5 centrada en el origen, y la segunda una recta (véase Figura 2). La intersección entre ambas curvas da como resultado dos posibles soluciones: (3,4) y (4,3).

Figura 2.
Representación de un sistema de ecuaciones no lineales



Nota: Elaboración propia.

Este ejemplo ilustra lo señalado por Blitzer (2018), quien sostiene que los sistemas no lineales enriquecen la comprensión geométrica, ya que sus soluciones no siempre corresponden a un único punto, sino a la interacción de curvas con diferentes formas y propiedades.

De manera análoga, en el caso de sistemas de inecuaciones, los lineales delimitan regiones poligonales en el plano, como ocurre en programación lineal (véase figura 3). Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

define un triángulo en el primer cuadrante que representa la región factible de soluciones.

Figura 3.
Representación de un sistema de ecuaciones lineales

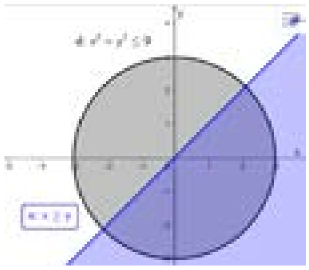
Nota: Elaboración propia.

En cambio, un sistema no lineal de inecuaciones, como:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x \geq y \end{cases}$$

describe la intersección entre el disco de radio 3 y el semiplano superior respecto a la recta $y = x$, lo que genera una región curva más compleja (véase Figura 4). Sullivan (2016) enfatiza que estas representaciones ayudan al estudiante a reconocer que resolver un sistema de inecuaciones no consiste únicamente en calcular valores, sino en delimitar espacios de validez.

Figura 4.
Representación de sistema de ecuaciones no lineales



Nota: Elaboración propia.

En conclusión, la clasificación de los sistemas en lineales y no lineales proporciona un marco conceptual que organiza la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Mientras los sistemas lineales ofrecen procedimientos estandarizados y soluciones interpretables como intersecciones de rectas o planos, los no lineales introducen al estudiante en un terreno más amplio, donde la diversidad de formas y soluciones potencia la capacidad de modelación y razonamiento adaptativo (Kilpatrick et al., 2001).

Tipos de soluciones

El estudio de los tipos de soluciones en los sistemas de ecuaciones e inecuaciones es un componente fundamental en la formación matemática, ya que permite comprender que la resolución no siempre conduce a un resultado único, sino que puede derivar en diferentes escenarios. Identificar estos casos no solo es relevante desde un punto de vista algebraico, sino también pedagógico, pues dota a los estudiantes de herramientas para razonar de forma flexible y crítica frente a distintos problemas (Duval, 2006).

En esencia, un sistema de ecuaciones o inecuaciones busca determinar los valores que satisfacen de manera simultánea todas las condiciones planteadas. Sin embargo, dependiendo de la naturaleza de las expresiones involucradas y de las relaciones entre ellas, los resultados posibles se agrupan en tres categorías principales: sistemas compatibles determinados, sistemas compatibles indeterminados y sistemas incompatibles (Anton et al., 2013).

Sistemas compatibles determinados

Un sistema es compatible determinado cuando existe una única solución que satisface todas las condiciones. En los sistemas lineales de dos variables, este caso corresponde gráficamente al punto de intersección de dos rectas no paralelas. Desde una perspectiva geométrica más amplia, se trata del cruce único entre planos o hiperplanos en dimensiones superiores.

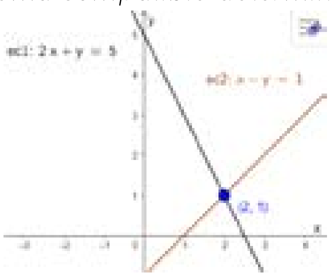
Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} 2\mathrm{x} + \mathrm{y} = 5 \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} = 1 \end{cases}$$

posee una única solución $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (2, 1)$. Este resultado refleja que ambas rectas comparten un solo punto común (véase Figura 5).

Stewart (2016) señala que este caso ejemplifica la unicidad de las condiciones, lo que se interpreta en contextos aplicados como un equilibrio exacto, por ejemplo, entre ingresos y gastos en economía o entre fuerzas en mecánica.

Figura 5.
Representación de sistema compatible determinado



Nota: Elaboración propia.

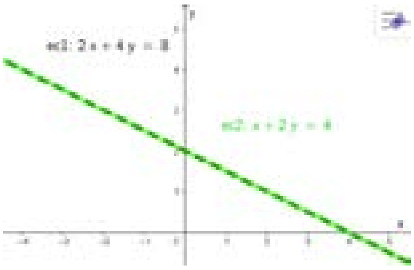
Sistemas compatibles indeterminados

Un sistema es compatible indeterminado cuando existen infinitas soluciones. En los sistemas lineales de dos variables, este caso ocurre cuando ambas ecuaciones representan rectas coincidentes, es decir, la misma recta expresada con formas algebraicas distintas. Gráficamente, todas las coordenadas de la recta común constituyen soluciones del sistema. En términos algebraicos, esta situación revela que el sistema no está suficientemente definido para restringir una única respuesta, lo que genera un conjunto infinito de posibilidades (Blitzer, 2018). Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

representa dos ecuaciones equivalentes (véase Figura 6); al simplificar, ambas corresponden a la misma recta.

Figura 6.
Representación de sistema compatible indeterminado

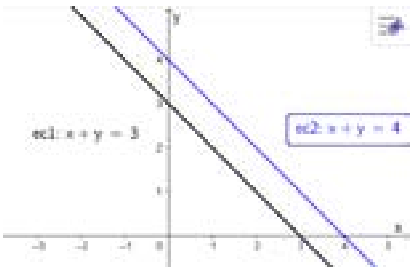


Nota: Elaboración propia.

Este caso es especialmente interesante desde la modelación, pues refleja fenómenos donde múltiples configuraciones cumplen las condiciones. En programación lineal, por ejemplo, las regiones factibles infinitas muestran que existe una familia de soluciones óptimas, lo cual exige utilizar criterios adicionales para seleccionar entre ellas (Sullivan, 2016).

Sistemas incompatibles
Un sistema es incompatible cuando no existe ningún valor que satisfaga simultáneamente todas las ecuaciones o inecuaciones. En los sistemas lineales de dos variables, esto ocurre cuando las rectas son paralelas y distintas, de modo que nunca se intersecan (véase Figura 7).

Figura 7.
Representación de sistema incompatible



Nota: Elaboración propia.

Algebraicamente, esto equivale a encontrar contradicciones como:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

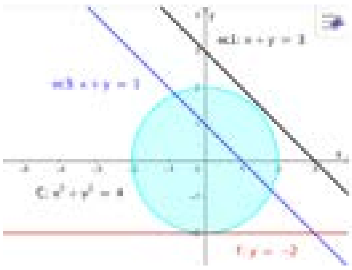
que claramente no pueden cumplirse al mismo tiempo. Este tipo de resultados no debe interpretarse como un fracaso en el cálculo, sino como evidencia de la inconsistencia de las condiciones planteadas. Apostol (2007) destaca que este escenario introduce en los estudiantes la noción de imposibilidad matemática, útil para analizar modelos en los que las restricciones resultan mutuamente excluyentes, como sucede en ciertos problemas económicos o físicos.

En contraste, los sistemas no lineales enriquecen de manera significativa el panorama de los tipos de soluciones, ya que las curvas involucradas (circunferencias, parábolas, hipérbolas, elipses, entre otras) permiten múltiples configuraciones geométricas.

Un ejemplo clásico es la intersección entre una recta y una circunferencia (véase Figura 8):

- Puede haber dos soluciones, cuando la recta corta a la circunferencia en dos puntos.
- Puede haber una solución única, cuando la recta es tangente y toca la circunferencia en un solo punto.
- Puede no haber ninguna solución, si la recta no toca la circunferencia.

Figura 8.
Representación de sistema incompatible

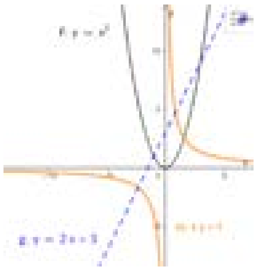


Nota: Elaaboración propia.

Estos casos ejemplifican cómo el análisis gráfico proporciona al estudiante una forma inmediata de visualizar la existencia y el número de soluciones sin necesidad de resolver algebraicamente todo el sistema (Apostol, 2007).

De manera similar, la intersección de dos parábolas puede generar hasta dos soluciones, mientras que la de una parábola con una hipérbola puede originar varias soluciones dependiendo de sus posiciones relativas (véase Figura 9).

Figura 9.
Representación de varias soluciones



Nota: Elaboración propia.

Stewart (2016) resalta que estos escenarios no lineales obligan a desarrollar habilidades de anticipación y de razonamiento visual, en tanto que los estudiantes deben prever el número de soluciones posibles antes de efectuar cálculos detallados.

Importancia de los sistemas en la modelación matemática

Los sistemas de ecuaciones e inecuaciones constituyen un núcleo esencial en la modelación matemática porque permiten representar situaciones complejas en las que intervienen múltiples variables y restricciones de manera simultánea. No se trata únicamente de resolver expresiones algebraicas, sino de comprender cómo estas estructuras se convierten en un lenguaje universal para traducir fenómenos reales en términos matemáticos. Según Blum y Leiss (2007), la modelación matemática es un proceso cíclico que inicia en una situación del mundo real, se transforma en un modelo simbólico, se resuelve con herramientas matemáticas y luego retorna al contexto, enriqueciendo la comprensión y la toma de decisiones.

La representación de la complejidad en contextos reales

Los sistemas de ecuaciones son herramientas privilegiadas porque condensan interacciones entre magnitudes. Un ejemplo clásico en economía es el cálculo del punto de equilibrio entre ingresos y costos:

$$\mathrm{I(x) = C(x)}$$

donde $\mathrm{I(x)}$ representa los ingresos por la venta de **"x"** unidades y $\mathrm{C(x)}$ los costos asociados. Resolver este sistema permite identificar el nivel de producción en el cual no se generan pérdidas ni ganancias, concepto central en la administración de empresas (Sullivan, 2016).

En la física, los sistemas lineales permiten calcular el punto de encuentro entre trayectorias de partículas o determinar el equilibrio de fuerzas en un cuerpo rígido. En biología, se utilizan para describir interacciones poblacionales como los modelos depredador-presa de Lotka y Volterra, que combinan ecuaciones no lineales para anticipar ciclos de crecimiento y decrecimiento en especies (Anton et al., 2013). En ingeniería, se aplican para la optimización de recursos, el diseño de estructuras y la programación de procesos industriales.

Por su parte, los sistemas de inecuaciones se han consolidado como la base de la programación lineal, técnica utilizada para maximizar beneficios o minimizar costos en contextos donde existen restricciones. La región factible generada por las inecuaciones delimita el espacio de posibles soluciones, dentro del cual se localizan los valores óptimos. Stewart (2016) enfatiza que este enfoque resulta indispensable en logística, transporte, planificación de la producción o gestión de inventarios.

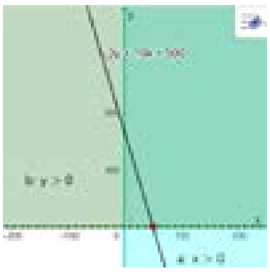
Más allá del cálculo: integración de condiciones y restricciones

La importancia de los sistemas radica en su capacidad para integrar diversas condiciones que, de forma aislada, serían insuficientes. Resolver un sistema significa encontrar el punto de intersección entre múltiples exigencias, lo que se traduce geométricamente en intersecciones de rectas, planos o curvas, y conceptualmente en soluciones que satisfacen simultáneamente todas las restricciones planteadas (Larson & Edwards, 2019).

De esta manera, los sistemas de ecuaciones e inecuaciones simbolizan un espacio de negociación entre variables: en economía, entre oferta y demanda; en física, entre fuerzas; en biología, entre especies; en la vida cotidiana, entre recursos limitados y necesidades crecientes. Apostol (2007) resalta que esta perspectiva dota a las matemáticas de un valor heurístico, pues no solo resuelven problemas, sino que ayudan a plantear escenarios y prever consecuencias.

Ejemplo económico: Una empresa produce dos artículos, “x” y “y”. El ingreso total está dado por $\mathrm{I = 20x + 15y}$, mientras que los costos de producción se expresan como $\mathrm{C = 10x + 12y + 500}$. Resolver el sistema $\mathrm{I = C}$ permite encontrar combinaciones de “x” y “y” donde la empresa no obtiene pérdidas ni ganancias (véase Figura 10).

Figura 10.
Representación de funciones ingreso total



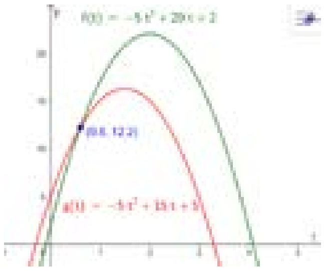
Nota: Elaboración propia.

Punto de equilibrio: $\mathrm{I} = \mathrm{C}$ es decir $\mathbf{20x + 15y = 10x + 12y + 500}$ con restricciones naturales: $\mathbf{x \geq 0,\ y \geq 0}$. El punto de equilibrio está dado por todas las parejas (x,y) que satisfacen $\mathbf{10x + 3y = 500}$ con $\mathbf{x,\ y \geq 0}$. Debajo de esa recta hay pérdidas; por encima, hay ganancias.

Ejemplo físico: Dos proyectiles lanzados desde distintos puntos siguen trayectorias parabólicas. Sus ecuaciones descritas en la generan un sistema cuya resolución indica si las trayectorias se cruzan en el espacio-tiempo. (véase Figura 11).

Buscamos si las trayectorias se cruzan en el espacio-tiempo (t,y), es decir, un mismo instante t con la misma altura "y". Las trayectorias se cruzan en $\mathbf{t = 0.6s}$ y 12.2 unidades de altura.

Figura 11.
Representación del lanzamiento de dos proyectiles



Nota: Elaboración propia.

Resolución de sistemas de ecuaciones

La resolución de sistemas de ecuaciones constituye un eje central en el aprendizaje del álgebra, pues permite comprender cómo diferentes condiciones pueden cumplirse simultáneamente en un mismo contexto. Desde una perspectiva histórica y formativa, los métodos de resolución surgieron como respuesta a problemas prácticos de comercio, astronomía o ingeniería, y posteriormente se consolidaron en un cuerpo teórico que hoy resulta indispensable en la enseñanza de la matemática (Katz, 2009).

Resolver un sistema implica determinar los valores de las incógnitas que satisfacen de manera conjunta todas las ecuaciones planteadas, lo que en términos geométricos se traduce en la búsqueda de intersecciones entre líneas, planos o curvas (Stewart, 2016). Esta doble dimensión, algebraica y geométrica, dota al estudio de los sistemas de una riqueza conceptual que favorece tanto el desarrollo de habilidades analíticas como la construcción de una intuición visual.

Métodos algebraicos: sustitución, igualación, reducción, Gauss y Cramer

El aprendizaje de los métodos algebraicos de resolución de sistemas de ecuaciones es un paso decisivo en la formación matemática, pues permite comprender cómo distintas condiciones pueden cumplirse de manera simultánea. Estos procedimientos no deben ser vistos únicamente como técnicas rutinarias, sino como estrategias de razonamiento que fortalecen la capacidad de análisis y la flexibilidad cognitiva (Godino, Batanero & Font, 2007). Entre los más utilizados en el ámbito escolar y universitario se encuentran el método de sustitución, el método de igualación y el método de reducción, cada uno con características propias que los hacen más adecuados según el tipo de sistema y el contexto de aplicación.

Método de sustitución

El método de sustitución se fundamenta en despejar una variable en una de las ecuaciones y reemplazarla en las demás, reduciendo gradualmente el número de incógnitas hasta obtener una solución. Este procedimiento es especialmente intuitivo, pues el estudiante logra visualizar cómo una condición se integra en otra. Según Johnson y Riess (2018), la sustitución fomenta la comprensión del concepto de "variable dependiente", es decir, cómo el valor de una incógnita queda condicionado por otra dentro del sistema.

Ejemplo: Para comprobar el nivel de razonamiento de los estudiantes de enseñanza General Básica, se aplicó una prueba de razonamiento de 20 preguntas sobre contenidos resolución de sistemas de ecuaciones. Por cada respuesta correcta se asigna tres puntos, y por cada incorrecta se restan dos. Si un estudiante obtiene 88 puntos, ¿cuántas preguntas respondió de manera correcta y cuántas de manera incorrecta?

Solución

- Considerar a **"x"** como la cantidad de respuestas correctas dadas por un estudiante.
- Considerar a **"y"** como la cantidad de respuestas incorrectas dadas por un estudiante.
- Formalizar el sistema de ecuaciones de acuerdo a las exigencias del problema.

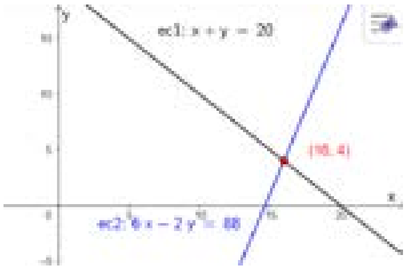
$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} = 20 & (1) \\ 6\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 88 & (2) \end{cases}$$

"Se despeja una variable en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra."

Se sustituye $\mathrm{x} = 16$ en la ecuación (1) $16 + \mathrm{y} = 20$
obteniéndose así $\mathrm{y} = 4$
Sustituir $\mathrm{y} = 20 - \mathrm{x}$ en la ecuación (2)
obteniendo: $6\mathrm{x} - 2(20 - \mathrm{x}) = 88$ (3)
$6\mathrm{x} - 40 + 2\mathrm{x} = 88$
$8\mathrm{x} = 128$
para obtener $\mathrm{x} = 16$

Respuesta: El estudiante respondió de manera correcta 16 preguntas y 4 de manera incorrecta y puede comprobar geométricamente el resultado (véase Figura 12)

Figura 12.
Representación del sistema de ecuaciones



Nota: Elaboración propia.

El método es recomendable cuando alguna ecuación presenta una variable con coeficiente 1 o -1, ya que simplifica el despeje (Larson & Edwards, 2019).

Método de igualación

Este procedimiento consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones y luego igualar los resultados obtenidos. El valor pedagógico del método radica en reforzar la noción de equivalencia algebraica, al mostrar que dos expresiones distintas pueden representar el mismo valor de una variable (Aparicio & Cantoral, 2015).

Si aplicamos el método de igualación al sistema anterior:

$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ 6x - 2y = 88 & (2) \end{cases}$$

Despejar x en las ecuaciones (1) y (2). Para obtener las ecuaciones (3) y (4).

$$\begin{cases} x = 20 - y & (3) \\ x = \frac{88+2y}{6} & (4) \end{cases}$$

al igualar las ecuaciones (3) y (4) obtenemos la ecuación (5)

$$20 - y = \frac{88 + 2y}{6} \quad \left(5\right)$$

que al resolverla obtenemos **y = 4** y al sustituir en (1) o en (2) obtenemos **x = 16**.

De acuerdo con Blitzer (2018), este método es muy útil cuando las dos ecuaciones son fácilmente manipulables, ya que reduce el sistema a una comparación directa. Además, permite desarrollar la capacidad de los estudiantes para reconocer cuándo dos representaciones algebraicas corresponden al mismo valor de una incógnita, lo que refuerza la idea de consistencia interna en el sistema.

Método de reducción

El método de reducción, también llamado de eliminación, se apoya en la combinación de ecuaciones para cancelar una de las incógnitas. Implica multiplicar alguna de las ecuaciones por un número conveniente para obtener coeficientes opuestos y luego sumar o restar. Este método constituye la base de técnicas más avanzadas como el uso de determinantes o el método de Gauss, por lo que su enseñanza prepara el terreno para un estudio más abstracto de los sistemas lineales (Anton et al., 2013).

Ejemplo

$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} = \frac{20}{(-6)}\ (1) \\ 6\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 88\ (2) \end{cases}$$

Se intenta eliminar una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones para resolver inicialmente una ecuación de primer grado. Se multiplica por - 6 la ecuación (1) para obtener el sistema siguiente

$$\begin{cases} -6\mathrm{x} - 6\mathrm{y} = -120\ (3) \\ 6\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 88\ (4) \end{cases}$$

al sumar ambas ecuaciones obtenemos: $-8\mathrm{y} = -32$, de donde **y = 4**. Al sustituir **y = 4** en (1) se obtiene **x = 16**.

Stewart (2016) indica que el método de reducción resulta más sistemático que los anteriores, sobre todo cuando los coeficientes no favorecen un despeje inmediato. Además, guarda una relación natural con el álgebra matricial, lo que lo convierte en un recurso idóneo para la transición a cursos avanzados de matemáticas.

Métodos de Gauss y Cramer

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales ha sido uno de los temas fundacionales del álgebra y, posteriormente, del álgebra lineal. Con el crecimiento de las ciencias aplicadas y el aumento en la complejidad de los problemas, surgió la necesidad de contar con métodos más estructurados que los tradicionales de sustitución, igualación o reducción. Entre los procedimientos más influyentes se encuentran el método de Gauss, también conocido como eliminación gaussiana, y la regla de Cramer, ambos con raíces históricas profundas y una enorme vigencia en la actualidad. Strang (2016) señala que el valor de estos métodos radica no solo en su poder de cálculo, sino también en su capacidad para conectar ideas fundamentales de la matemática como matrices, determinantes, independencia lineal y existencia de soluciones.

El método de Gauss: sistematicidad y generalización

El método de Gauss se presenta como un algoritmo general que transforma un sistema de ecuaciones en una matriz aumentada sobre la que se aplican operaciones elementales por filas hasta obtener una forma escalonada. Dichas operaciones (intercambiar filas, multiplicarlas por un escalar o sumar múltiplos de una fila a otra) no alteran el conjunto de soluciones del sistema, lo que garantiza la validez del procedimiento (Lay, 2016).

Más allá de lo operativo, el método de Gauss permite clasificar los sistemas lineales en:

- **Compatibles determinados**, cuando la matriz escalonada conduce a una solución única.
- **Compatibles indeterminados**, cuando quedan variables libres que generan infinitas soluciones.
- **Incompatibles**, cuando aparece una contradicción del tipo 0 =1.

Este procedimiento no solo resuelve, sino que revela la estructura interna del sistema. Según Anton et al. (2013), la eliminación gaussiana constituye la base de la enseñanza de álgebra lineal, pues conecta con conceptos como el rango de una matriz y la noción de consistencia de un sistema.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Tabla 1.
Descripción del método de Gauss

Idea central
Transformar el sistema lineal $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ en su matriz aumentada $[\mathrm{A}|\mathrm{b}]$ y aplicar operaciones elementales por filas que no cambian el conjunto de soluciones hasta obtener forma escalonada. Luego se resuelve por sustitución regresiva. Este procedimiento es sistemático, escalable y revela la estructura del sistema: pivotes, rango, compatibilidad y número de soluciones (Lay, 2016; Strang, 2016).

1. **Operaciones elementales por filas**

- Intercambiar dos filas: $\mathrm{R_i} \leftrightarrow \mathrm{R_j}$.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $\mathrm{R_i} \leftarrow \mathrm{kR_i}$.
- Sumar a una fila un múltiplo de otra: $\mathrm{R_i} \leftarrow \mathrm{R_i} + \mathrm{kR_j}$.
- Estas operaciones preservan el conjunto de soluciones del sistema (Anton et al., 2013).

2. **Objetivo intermedio: forma escalonada (REF)**

Una matriz está en forma escalonada si:

- Toda fila no nula aparece sobre cualquier fila nula.
- El primer elemento no nulo de cada fila (pivote) queda a la derecha del pivote de la fila superior.
- Debajo de cada pivote hay ceros.

Con la REF se hace sustitución regresiva de arriba a abajo. Si además se anulan los elementos encima de cada pivote y se normalizan pivotes a 1, se obtiene la forma escalonada reducida, que corresponde a Gauss - Jordan. Para Gauss puro basta la REF (Lay, 2016).

3. **Algoritmo práctico con pivoteo parcial**

Para robustez numérica se recomienda pivoteo parcial: en cada columna del pivote, seleccionar como fila pivote la que tenga mayor |coeficiente| en esa columna y permutarla a la posición actual. Esto reduce errores de redondeo en cómputo y evita pivotes cercanos a 0 (Golub y Van Loan, 2013; Trefethen y Bau, 1997).

Bucle por columnas $\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{n}$:

1. Elegir fila pivote "p" con $\max_{\mathrm{i} \geq \mathrm{k}} |\mathrm{a_{ik}}|$ y permutar $\mathrm{R_i} \leftrightarrow \mathrm{R_p}$ si es necesario.
2. Para cada fila i>, calcular el multiplicador $\mathbf{m}_{\mathrm{ik}} = \dfrac{\mathrm{a_{ik}}}{\mathrm{a_{kk}}}$ y hacer $\mathbf{R}_{\mathrm{i}} \leftarrow \mathbf{R}_{\mathrm{i}} - \mathbf{m}_{\mathrm{ik}}\mathbf{R}_{\mathrm{k}}$ con lo que se crean ceros debajo del pivote.
3. Repetir en la siguiente columna.
4. Con la REF, resolver hacia atrás.

Si aparece una fila del tipo [0 0 ...0 c], con $\mathrm{c} \neq 0$ el sistema es incompatible. Si quedan menos pivotes que variables, hay infinitas soluciones con variables libres (Strang, 2016).

Nota: Elaboración propia.

Tabla 2.
Descripción paso a paso método de Gauss

Matriz aumentada	$\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}$
Paso 1. Pivote en columna 1 Conviene tener pivote 1 arriba. Intercambiamos $\mathbf{R}_1 \leftrightarrow \mathbf{R}_2$	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}$
Paso 2. Crear ceros debajo del pivote $a_{11} = 1$ $\mathbf{R}_2 \leftarrow \mathbf{R}_2 - 2\mathbf{R}_1$ $\mathbf{R}_3 \leftarrow \mathbf{R}_3 - 3\mathbf{R}_1$	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array}$
Paso 3. Pivote en columna 2 y anulación. Tomamos $\mathbf{R}_2$ como pivote en columna 2. Eliminamos la entrada de $\mathbf{R}_3$. Para no introducir fracciones, usamos una combinación: Para no introducir fracciones, usamos una combinación: $\mathbf{R}_3 \leftarrow 5\mathbf{R}_2 - 3\mathbf{R}_3$	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}$
Paso 4. Sustitución regresiva	De la tercera fila: $-10z = -10 \Rightarrow z = 1$. De la segunda: $3y - 5z = -5 \Rightarrow y = 0$. De la primera: $x - y + 2z = 3 \Rightarrow x = 1$.
Solución única	$(x, y, z) = (1, 0, 1)$

Nota: Elaboración propia.

Detección rápida de casos con Gauss

- **Incompatible:** Aparece una fila [0 0 ...0 c] con $c \neq 0$.
- **Infinitas soluciones:** Quedan menos pivotes que variables. Parametrizar con variables libres.
- **Única solución:** Hay un pivote por cada variable.

Apoyo didáctico: El método de Gauss constituye un procedimiento sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales, basado en transformar la matriz aumentada mediante operaciones elementales por filas hasta obtener una forma escalonada que facilite la sustitución regresiva. Su valor radica en que no solo permite hallar soluciones únicas, sino también identificar casos de sistemas incompatibles o con infinitas soluciones, lo que fortalece la comprensión estructural del problema (Lay, 2016). Además, este método constituye la base de los algoritmos computacionales utilizados en programas matemáticos actuales y conecta con nociones más avanzadas como el rango, la independencia lineal y la invertibilidad de matrices (Strang, 2016; Larson & Edwards, 2019).

Tabla 3.
Descripción método de Cramer

Idea central La regla de Cramer, atribuida al matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752), establece que un sistema de **"n"** ecuaciones lineales con nnn incógnitas tiene solución única si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. En ese caso, cada incógnita puede obtenerse como el cociente entre dos determinantes: $$\mathbf{x}_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},\ i = 1, 2, \ldots, n$$ donde: • A es la matriz de coeficientes. • $\mathbf{A}_i$ es la matriz que se obtiene al reemplazar la columna i de A por el vector de términos independientes. Si $\det(A) = 0$, el sistema puede ser indeterminado o incompatible, y la regla de Cramer no se aplica (Strang, 2016; Stewart, 2016).
Procedimiento paso a paso 1. Formar la matriz de coeficientes A con los coeficientes de las incógnitas. 2. Calcular el determinante $\det(A)$. Si $\det(A) = 0$, detenerse: el sistema no tiene solución única.
Para cada incógnita x_i: • Reemplazar la columna i de A por el vector de términos independientes. • Llamar a esa nueva matriz $\mathbf{A}_i$. • Calcular $\det(A_i)$ • Aplicar la fórmula: $$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$ • Repetir para todas las incógnitas.

Nota: Elaboración propia.

Ejemplo:
Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - \mathrm{z} = 3 \\ 2\mathrm{x} - \mathrm{y} + \mathrm{z} = 1 \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = 4 \end{cases}$$

Tabla 4.
Descripción paso a paso método de Cramer

Paso 1. Matriz de coeficientes y determinante	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$
Paso 2. Cálculo de cada incógnita	
Para x: $\det(\mathbf{A}_1) = -7$ $\mathrm{x} = \dfrac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathrm{A})} = 1$	$\mathbf{A}_1 = \begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 3 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$
Para y: $\det(\mathbf{A}_2) = -14$ $\mathrm{y} = \dfrac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathrm{A})} = 2$	$\mathbf{A}_2 = \begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 3 & -1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$
Para z: $\det(\mathbf{A}_3) = -7$ $\mathrm{z} = \dfrac{\det(\mathbf{A}_3)}{\det(\mathrm{A})} = 1$	$\mathbf{A}_3 = \begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$
Solución única	$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (1, 2, 1)$

Nota: Elaboración propia.

Apoyo didáctico: La regla de Cramer se convierte en un recurso pedagógico valioso cuando se trabaja con sistemas de **2x2 y 3x3**, ya que permite calcular soluciones de manera directa y accesible. Su mayor aporte radica en reforzar la comprensión de la relación entre determinantes, invertibilidad y existencia de soluciones únicas, lo que conecta la práctica algebraica con conceptos fundamentales del álgebra lineal (Larson & Edwards, 2019). Aunque su aplicación no resulta eficiente en sistemas de gran tamaño, su enseñanza fomenta la articulación entre procedimientos operativos y bases teóricas. En este sentido, como advierte Apostol (2007), el determinante no solo funciona como medida de escala en transformaciones lineales, sino que también actúa como criterio que garantiza o limita la unicidad de las soluciones.

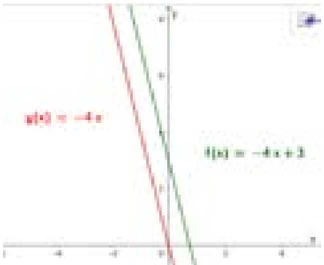
Método gráfico y análisis geométrico

El método gráfico constituye una de las aproximaciones más intuitivas y formativas para la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas. Su valor pedagógico radica en que permite a los estudiantes visualizar las soluciones como puntos de intersección de curvas, lo cual enlaza de manera directa el álgebra con la geometría. Desde esta perspectiva, resolver un sistema no se reduce a manipular símbolos, sino a comprender que cada ecuación representa un conjunto de puntos en el plano (o en el espacio) y que la solución corresponde al lugar geométrico común a todas ellas.

En el caso de los sistemas lineales de dos variables, las ecuaciones representan rectas en el plano cartesiano (véase Figura 13). El análisis gráfico permite interpretar tres situaciones básicas:

- **Una solución única:** Las rectas se cortan en un punto, lo que corresponde a un sistema compatible determinado.
- **Infinitas soluciones:** Las rectas coinciden, lo que refleja un sistema compatible indeterminado.
- **Ninguna solución:** Las rectas son paralelas y no se interceptan, lo que da lugar a un sistema incompatible.

Figura 13.
Representación sistemas lineales de dos variables



Nota: Elaboración propia.

Este enfoque fomenta en el estudiante la comprensión de que la existencia y naturaleza de las soluciones dependen de la posición relativa de las rectas y no únicamente de los cálculos algebraicos. Como señala Stewart (2016), esta correspondencia entre ecuaciones y gráficas constituye una poderosa herramienta de razonamiento, pues vincula la abstracción algebraica con la representación visual.

En sistemas no lineales, el método gráfico adquiere mayor riqueza. Resolver un sistema que involucra una parábola y una recta, o una circunferencia y una recta, implica analizar cuántos puntos de intersección son posibles: ninguno, uno o dos, según la posición relativa de las curvas. En contextos más avanzados, el encuentro entre curvas como parábolas, hipérbolas o elipses lleva al estudiante a reconocer que las soluciones algebraicas no solo son números, sino también coordenadas que tienen sentido geométrico (Larson & Edwards, 2019).

El análisis geométrico que acompaña al método gráfico amplía esta perspectiva, ya que no se limita a trazar curvas, sino a estudiar sus propiedades y relaciones en el espacio cartesiano. Así, conceptos como pendiente, paralelismo, perpendicularidad, vértices, focos o ejes de simetría enriquecen la interpretación de los sistemas. De este modo, el aprendizaje de los métodos algebraicos (sustitución, igualación, reducción) se complementa con una visión estructural que integra el álgebra simbólica, la geometría analítica y la intuición visual (Anton et al., 2013).

En definitiva, el método gráfico y el análisis geométrico no son simples recursos didácticos, sino fundamentos esenciales para comprender la naturaleza de los sistemas de ecuaciones. Su integración en el aula contribuye a formar un pensamiento algebraico sólido, en el que la resolución de problemas se entiende como la interacción entre distintos registros de representación: simbólico, geométrico y tecnológico (Duval, 2006).

Apoyo didáctico: En la práctica educativa, el método gráfico resulta especialmente valioso en los niveles iniciales, pues ayuda a construir la idea de solución como intersección, antes de introducir procedimientos más abstractos. Además, con el apoyo de tecnologías digitales como GeoGebra o Desmos, los estudiantes pueden explorar dinámicamente cómo cambian las soluciones al modificar parámetros, lo que fortalece la comprensión conceptual y promueve la experimentación (Hohenwarter & Jones, 2007).

Tabla 5.
Síntesis comparativa de los métodos gráfico y geométrico

Aspecto	Método gráfico	Análisis geométrico	Similitudes
Definición	Representación visual de las ecuaciones para identificar la solución como punto(s) de intersección.	Estudio de las propiedades estructurales y relacionales de las curvas generadas por las ecuaciones.	Ambos interpretan las ecuaciones como lugares geométricos en el plano o el espacio.
Objetivo principal	Encontrar soluciones mediante la intersección visible de las gráficas.	Comprender por qué y cómo surgen esas soluciones, explorando propiedades como pendiente, simetría o tangencia.	Ambos buscan determinar las soluciones comunes del sistema.
Ámbito de aplicación	Útil en sistemas sencillos (dos incógnitas). Limitado para sistemas de mayor dimensión o soluciones exactas.	Válido para sistemas lineales y no lineales en dos o más variables, incluso en contextos tridimensionales.	Ambos sirven de apoyo a la modelación matemática en diversas ciencias.
Valor pedagógico	Favorece la intuición visual y la comprensión inicial del concepto de solución.	Promueve la comprensión estructural, la capacidad de análisis y el razonamiento crítico.	Ambos fortalecen el pensamiento algebraico mediante la conexión entre álgebra y geometría.
Tecnología asociada	Programas como GeoGebra o Desmos facilitan la representación visual y la validación inmediata.	Las mismas herramientas permiten explorar propiedades más profundas de las curvas y superficies.	En ambos casos, la tecnología actúa como un puente entre lo simbólico y lo gráfico.

Nota: Elaboración propia.

Sistemas no lineales: cuadráticos y mixtos

El estudio de los sistemas no lineales constituye un punto de inflexión en la formación algebraica, pues sitúa al estudiante frente a problemas en los que la linealidad ya no es suficiente para describir relaciones. A diferencia de los sistemas lineales, que se representan mediante rectas o planos, los sistemas no lineales involucran curvas más complejas tales como como: parábolas, circunferencias, hipérbolas, exponenciales, radicales y que requieren un análisis más elaborado. Este tránsito, como señalan Larson y Edwards (2019), fomenta una comprensión más amplia del álgebra, vinculándola directamente con la geometría y la modelación de fenómenos reales.

Sistemas cuadráticos

Los sistemas cuadráticos incluyen al menos una ecuación de segundo grado en dos variables. Sus soluciones se interpretan como los puntos de intersección entre rectas y curvas cuadráticas (parábolas, circunferencias, elipses, hipérbolas). La diversidad de casos permite explorar múltiples configuraciones geométricas, lo que enriquece tanto el análisis algebraico como el razonamiento visual.

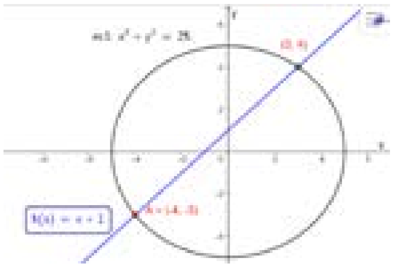
Por ejemplo, consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Aquí, la primera ecuación describe una circunferencia de radio 5 centrada en el origen, y la segunda una recta de pendiente 1 que corta al eje y en (0,1) (véase Figura 14). Al resolver por sustitución, obtenemos una ecuación cuadrática:

$$x^2 + (x+1)^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$$

Figura 14.
Representación de sistemas cuadráticos



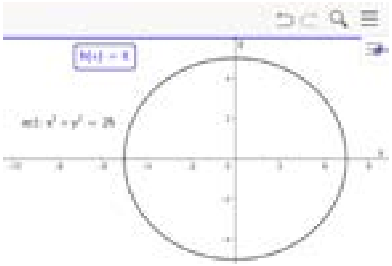
Nota: Elaboración propia.

La factorización conduce a dos soluciones: $X = 3$ y $X = -4$. Sustituyendo en la recta, las soluciones completas son $(3,\ 4)$ y $(-4, -3)$. Desde la perspectiva gráfica, se identifican claramente los dos puntos de intersección entre la circunferencia y la recta.

Según Stewart (2016), este tipo de problemas ilustra de manera ejemplar cómo los métodos algebraicos y geométricos convergen en un mismo resultado, fortaleciendo el pensamiento multirrepresentacional del estudiante.

En contraste, si la recta fuera $y = 6$, al sustituir en la circunferencia se obtiene $x^2 + 36 = 25$, lo que no admite soluciones reales (véase Figura 15).

Figura 15.
Representación de sistemas cuadráticos



Nota: Elaboración propia.

Geométricamente, esto significa que la recta no intercepta la circunferencia. Este ejemplo evidencia cómo la inexistencia de soluciones adquiere sentido a partir de la posición relativa de las gráficas (Blitzer, 2018).

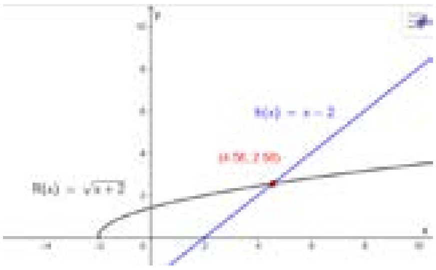
Sistemas mixtos

Los sistemas mixtos combinan ecuaciones de distinta naturaleza: lineales con cuadráticas, exponenciales con racionales, radicales con polinómicas, entre otros. Su riqueza radica en que obligan a los estudiantes a integrar diferentes estrategias de resolución y, en ocasiones, a emplear aproximaciones numéricas o gráficas cuando las soluciones exactas son inaccesibles (véase Figura 16).

Un ejemplo clásico es el sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Figura 16.
Representación de sistemas mixtos



Nota: Elaboración propia.

Al elevar al cuadrado, se obtiene una ecuación cuadrática: $\mathrm{x}+2=(\mathrm{x}-2)^2$. Tras simplificar, surge $\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+2=0$, cuyas soluciones son

$$\mathrm{x}_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2} \text{ y } \mathrm{x}_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

La recta $\mathrm{y}=\mathrm{x}-2)$ corta una sola vez a la curva $\mathrm{y}=\sqrt{\mathrm{x}+2}$ (creciente, cóncava hacia abajo en $[-2,\infty)$. Por eso, tras descartar la raíz extrínseca introducida al cuadrar, queda una única intersección.

La verificación de soluciones en sistemas mixtos resulta un aspecto pedagógico clave, ya que no toda respuesta obtenida mediante transformaciones algebraicas corresponde a una solución válida dentro del dominio de la función. Casos como la elevación al cuadrado o el trabajo con radicales suelen generar raíces extrínsecas que deben ser descartadas tras comprobarlas en la ecuación original. Este proceso, como señalan Sullivan (2016) y Larson y Edwards (2019), permite que los estudiantes comprendan la diferencia entre manipulación simbólica y validez matemática, promoviendo así un aprendizaje reflexivo más allá del simple cálculo mecánico.

Desde una perspectiva didáctica, el énfasis en la validación desarrolla en los estudiantes la capacidad crítica y la autonomía intelectual. Según Duval (2006), pasar de lo simbólico a lo gráfico o a lo numérico fortalece la comprensión al articular distintos registros de representación. Además, trabajar con ejemplos donde aparezcan soluciones espurias ayuda a los alumnos a distinguir entre "resultado algebraico" y "solución matemática aceptable", lo que Blum y Leiss (2007) consideran esencial para la modelación en contextos reales. En este sentido, el aula se convierte en un espacio para pensar matemáticamente (Mason, Burton & Stacey, 2010), explorando, verificando y justificando cada paso con coherencia conceptual.

Estrategias didácticas y recursos tecnológicos para el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones

El estudio de los sistemas de ecuaciones representa una oportunidad didáctica privilegiada para articular los razonamientos algebraicos, geométricos y funcionales en la enseñanza media y superior. Su tratamiento exige diseñar ambientes de aprendizaje que integren actividades significativas, tecnologías digitales y una evaluación orientada a la comprensión conceptual más que a la memorización de procedimientos. A continuación, se describen estrategias que favorecen dicho proceso.

Tipología de ejercicios: procedimentales, gráficos, contextualizados y exploratorios

La selección y secuenciación de ejercicios condiciona el tipo de pensamiento algebraico que los estudiantes desarrollan. Según Rico (2018), una enseñanza reducida a la práctica rutinaria refuerza un pensamiento instrumental, mientras que la diversificación de tareas amplía la comprensión estructural del álgebra. En el caso de los sistemas de ecuaciones, se distinguen cuatro tipos de ejercicios didácticamente complementarios:

- **Procedimentales**, centrados en el dominio de métodos algebraicos como sustitución, igualación, reducción, Cramer o Gauss, enfatizando la precisión y el orden lógico del razonamiento simbólico.

Ejemplo: Resolver el sistema por el método de sustitución:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

- **Gráficos**, orientados a la interpretación del punto de intersección de rectas o curvas, favoreciendo el pensamiento visual.

Ejemplo: Representar en GeoGebra las rectas:

$y = -2x + 7, y = \dfrac{3x - 4}{2}$ observando el punto donde se cruzan.

- **Exploratorios**, abiertos a múltiples soluciones o caminos, donde los estudiantes elaboran conjeturas y verifican sus resultados.

$$\begin{cases} y = 2 + 0.5x \ (1) \\ y = 1 + 0.7x \ (2) \end{cases}$$

Ejemplo: Dos servicios de transporte cobran tarifas diferentes: uno tiene una tarifa base de $2 más $0.5 por kilómetro, y otro $1 más $0.7 por kilómetro. Plantee un sistema que permita determinar a partir de qué distancia ambos servicios cuestan lo mismo.

- **Contextualizados**, que vinculan los sistemas con situaciones reales, como la comparación de tarifas, mezclas químicas o modelos económicos.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \ (1) \\ 4x + 2y = 10 \ (2) \end{cases}$$

Ejemplo: Diseñe un sistema que no tenga solución y justifique por qué.

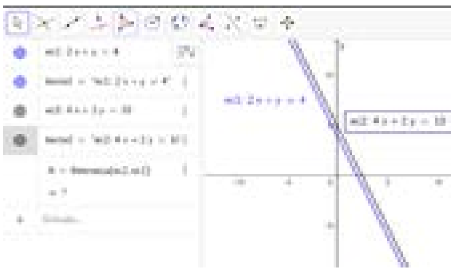
La combinación equilibrada de estas tipologías permite avanzar desde la práctica algorítmica hacia la modelación matemática y la reflexión metacognitiva sobre los procedimientos empleados.

Uso de tecnologías digitales como GeoGebra y Desmos

Las herramientas tecnológicas ofrecen un medio privilegiado para conectar las representaciones algebraicas y gráficas de un sistema, permitiendo que el estudiante observe cómo una expresión simbólica toma forma en el plano. GeoGebra, por ejemplo, facilita este tránsito al mostrar de manera simultánea las ecuaciones que se estudian y su comportamiento visual. Al mover un deslizador o modificar un valor, el cambio se refleja de inmediato en la pantalla, lo que ayuda a comprender mejor la relación entre parámetros y resultados. Esta dinámica vuelve el aprendizaje más intuitivo, ya que el estudiante no se limita a seguir pasos, sino que puede explorar y comprobar por sí mismo cómo interactúan las variables dentro del sistema.

Además, la posibilidad de visualizar puntos de intersección, trayectorias o transformaciones en tiempo real refuerza la comprensión funcional de los conceptos. Cuando el estudiante identifica de manera clara dónde se cruzan las curvas o cómo se desplazan al alterar algún elemento, la idea matemática deja de ser una abstracción y se convierte en una experiencia observable. Esto no solo fortalece la comprensión conceptual, sino que también promueve una actitud más investigativa y autónoma frente al aprendizaje. En este sentido, plataformas como GeoGebra se vuelven aliadas potentes para desarrollar una mirada más profunda, crítica y significativa sobre las matemáticas (Pardo & Gómez, 2019).

Figura 17.
Representación gráfica en Geogebra



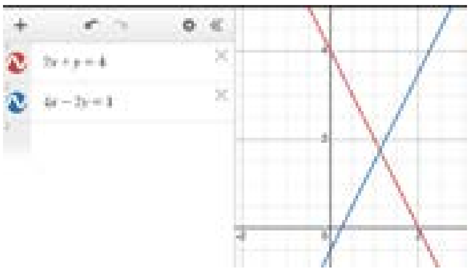
Nota: Elaboración propia.

Desmos, por su parte, se ha convertido en una herramienta muy cercana para los estudiantes porque les permite experimentar con las matemáticas sin sentir la presión de instalar programas o configurar entornos complicados. Basta con abrir una pestaña del navegador para comenzar a mover parámetros, observar cambios en gráficos y comprobar cómo se comportan las funciones en tiempo real. Esa inmediatez genera una sensación de descubrimiento que muchas veces resulta más motivadora que una explicación tradicional, ya que el propio estudiante puede comprobar qué ocurre cuando modifica un número, ajusta un deslizador o compara diferentes representaciones.

Además, su interfaz sencilla y visual hace que el aprendizaje se sienta más accesible, especialmente para quienes necesitan apoyos concretos para comprender ideas abstractas. Desmos no solo ayuda a ver el resultado final, sino también a explorar el "camino" que sigue una función o una ecuación, lo que favorece la comprensión profunda y la autonomía para investigar por cuenta propia. En este sentido, la plataforma funciona como un espacio seguro para equivocarse, probar alternativas y construir intuiciones matemáticas que luego pueden trasladarse con mayor seguridad al trabajo formal en clase.

Por ejemplo, al variar los coeficientes de dos rectas (véase Figura 18), el estudiante puede observar en tiempo real cómo cambia la posición del punto de intersección, comprendiendo el concepto de dependencia lineal.

Figura 18.
Representación gráfica en Desmo



Nota: Elaboración propia.

Estas plataformas fomentan lo que Drijvers y Boon (2021) denominan "pensamiento algebraico mediado por tecnología", donde los entornos digitales se convierten en herramientas cognitivas que amplían la capacidad de visualización y argumentación del estudiante. Además, el uso de Wolfram Alpha o Symbolab puede integrarse como apoyo para la verificación y autoevaluación, siempre que el docente guíe la reflexión sobre los pasos seguidos por el programa y las posibles fuentes de error humano o algorítmico.

Conclusiones

El estudio de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones permite comprender cómo distintas condiciones pueden cumplirse al mismo tiempo en una misma situación. Más allá de resolver ecuaciones por rutina, se trata de aprender a interpretar cómo las variables se relacionan entre sí y cómo esas relaciones pueden representarse en el plano o en contextos reales. Resolver un sistema no es solo encontrar números, sino entender el significado de esas soluciones y su coherencia con el problema planteado.

Desde la enseñanza, este tema cobra valor cuando se combina la explicación teórica con la experimentación y el uso de recursos visuales o tecnológicos. Métodos como la sustitución, la reducción o el de Gauss permiten ver el orden interno del álgebra, mientras que herramientas como GeoGebra o Desmos ayudan a descubrir visualmente el punto donde las rectas o las curvas se cruzan, haciendo más tangible el concepto de solución.

Referencias

Aparicio, M., & Cantoral, R. (2015). El pensamiento algebraico y su desarrollo en el aula. Universidad Autónoma Metropolitana.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2013). Cálculo: Trascendentes tempranas (10. ed.). Wiley.

Apostol, T. M. (2007). Cálculo. Volumen I: Cálculo de una variable, con introducción al álgebra lineal (2. ed.). Wiley. (Publicado originalmente en 1967)

Blitzer, R. (2018). Álgebra y trigonometría (6.ª ed.). Pearson.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). Cómo los estudiantes y profesores abordan problemas de modelización. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), Modelización matemática (ICTMA12): Educación, ingeniería y economía (pp. 222–231). Horwood Publishing.

Drijvers, P., & Boon, P. (2021). Technological mediation in algebra learning. Springer.

Duval, R. (2006). Un análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM – Mathematics Education, 39(1–2), 127–135.

Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix computations (4. ed.). Johns Hopkins University Press.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27(3), 126–131.

Johnson, D. W., & Riess, E. (2018). La enseñanza cooperativa del razonamiento algebraico: Estrategias para el aprendizaje activo. Interaction Book Company.

Katz, V. J. (2009). Historia de las matemáticas: Una introducción (3. ed.). Addison-Wesley.
Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Sumando logros: Cómo aprenden matemáticas los niños. National Academy Press.
Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). Calculus of a single variable (12th ed.). Cengage Learning
Lay, D. C. (2016). Álgebra lineal y sus aplicaciones (5. ed.). Pearson.
Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). Pensar matemáticamente (2. ed.). Pearson.
Pardo, M., & Gómez, R. (2019). Visualización dinámica y aprendizaje algebraico: Aportes del uso de GeoGebra. Educación Matemática, 31(1), 67–84. https://doi.org/10.24844/EM3101.03
Rico, L. (2018). Educación matemática: Fundamentos, enseñanza y aprendizaje. Sinew.
Stewart, J. (2016). Cálculo: Trascendentes tempranas (8. ed.). Cengage Learning.
Strang, G. (2016). Introducción al álgebra lineal (5. ed.). Wellesley-Cambridge Press.
Sullivan, M. (2016). Álgebra y trigonometría (10. ed.). Pearson.
Trefethen, L. N., & Bau, D. (1997). Numerical linear algebra. SIAM.

Capítulo III

Funciones algebraicas y sus propiedades

Introducción

Llegar al estudio de las funciones significa alcanzar un punto de madurez en el pensamiento matemático. En este capítulo, el lector se adentra en el mundo de las *funciones algebraicas*, donde las relaciones dejan de ser simples ecuaciones para convertirse en modelos que explican cómo una magnitud influye en otra. Comprender una función es entender que detrás de cada número hay una historia de dependencia y cambio, una manera de representar los vínculos que existen entre los fenómenos del entorno. De ahí que el estudio de las funciones no sea solo una cuestión de cálculo, sino una experiencia intelectual que invita a mirar la realidad desde la lógica de las relaciones y las transformaciones.

Las funciones algebraicas poseen una riqueza que combina precisión y belleza. Cada una describe un comportamiento particular: la recta expresa la constancia, la parábola refleja la simetría, los polinomios superiores muestran la complejidad del movimiento. Su análisis

ISBN 978-9942-596-06-2 | 2025
https://editorial.risei.org

enseña a reconocer patrones, a anticipar tendencias y a conectar el pensamiento algebraico con la interpretación geométrica. En ese proceso, el estudiante aprende que una gráfica no es una simple curva, sino una forma de pensar visualmente, de interpretar cómo los números dialogan entre sí para dar sentido a una situación concreta.

Este capítulo invita, además, a asumir una actitud exploratoria. Las herramientas tecnológicas, como GeoGebra o Desmos, se convierten en aliados para descubrir, verificar y visualizar las propiedades de las funciones, fortaleciendo la comprensión y el razonamiento. Más que resolver ejercicios, se trata de aprender a observar el comportamiento de las variables, a conjeturar y a contrastar resultados. De esta manera, el estudio de las funciones algebraicas se transforma en un espacio donde el rigor se combina con la creatividad, preparando al lector para un nuevo nivel de comprensión: el de las funciones trascendentes, en las que el lenguaje del álgebra se expande para describir los procesos más sutiles y fascinantes de la naturaleza y del pensamiento humano.

Concepto y representación de las funciones

La idea de función, tan natural hoy para describir la dependencia entre dos magnitudes, es el resultado de un largo proceso histórico en el que las matemáticas pasaron de observar relaciones empíricas a formalizarlas en lenguaje simbólico. En la Antigüedad, las civilizaciones griega y babilónica ya reconocían conexiones entre variables, por ejemplo, al relacionar la longitud de una cuerda con el tono musical o el tiempo con la distancia recorrida, aunque sin un concepto explícito de función (Katz, 2009). Estas primeras intuiciones se manifestaban más como proporciones geométricas o tablas de correspondencia que como fórmulas algebraicas.

Evolución histórica del concepto de función

Durante el siglo XVII, con el surgimiento del pensamiento moderno, el concepto comenzó a adquirir forma. René Descartes, en *La Géométrie* (1637), estableció el vínculo entre el álgebra y la geometría al introducir el sistema de coordenadas cartesianas, lo que permitió representar relaciones mediante ecuaciones. Su aporte sentó las bases para concebir una función como una relación entre variables expresable en forma analítica. Paralelamente, Pierre de Fermat exploró ideas similares al estudiar curvas mediante ecuaciones, anticipando el uso funcional de la variable independiente. Más adelante, Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero en emplear el término functio hacia 1692, al referirse a cualquier cantidad dependiente de otra dentro de una expresión matemática (Burton, 2011).

El siglo XVIII consolidó el concepto gracias a la obra de Leonhard Euler, quien en su Introductio in analysin infinitorum (1748) definió una función como una expresión analítica formada por una o más variables independientes. Esta definición, aunque aún restringida a expresiones algebraicas y trascendentes continuas, marcó un punto de inflexión al integrar la notación moderna $\mathbf{f(x)}$, que permanece vigente hasta hoy. Joseph-Louis Lagrange amplió posteriormente la idea al estudiar funciones derivables y sus expansiones en series, sentando las bases del análisis matemático clásico (Boyer & Merzbach, 2011).

Durante el siglo XIX, el desarrollo del análisis riguroso y de la teoría de conjuntos transformó profundamente la noción de función. Dirichlet formuló en 1837 una definición más general y abstracta: una función es una correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto "x" un único valor "y", sin necesidad de que exista una ley analítica explícita entre ellos. Esta concepción liberó el concepto de su dependencia con la geometría o la continuidad, y abrió paso a las funciones discontinuas, definidas por tramos o mediante condiciones lógicas. Posteriormente, Riemann y Weierstrass formalizaron los criterios de continuidad y derivabilidad, dotando al análisis de una precisión conceptual que influyó en toda la matemática moderna (Apostol, 2013).

Ya en el siglo XX, el avance de la topología, la teoría de conjuntos y la informática extendió aún más el concepto. Las funciones pasaron a entenderse como relaciones entre estructuras, no necesariamente numéricas, y su estudio se proyectó en múltiples campos: la física, la economía, la estadística y la programación computacional. En la educación matemática, autores como Dubinsky y Harel (1992) destacaron que el aprendizaje del concepto de función implica un cambio cognitivo profundo: el estudiante debe pasar de ver la función como una fórmula a comprenderla como una correspondencia general.

En síntesis, el concepto de función ha evolucionado desde una intuición geométrica y empírica hasta convertirse en una herramienta abstracta y universal para modelar relaciones de dependencia en cualquier ámbito del conocimiento. Esta trayectoria histórica no solo refleja el progreso del pensamiento matemático, sino también la capacidad del ser humano para reconocer patrones, formalizar relaciones y construir significados cada vez más complejos.

Definición formal y correspondencia entre variables

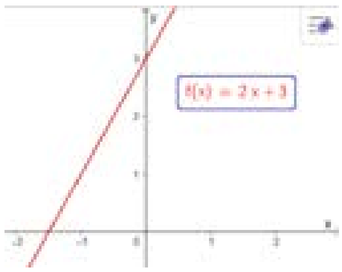
Comprender el concepto formal de función implica adentrarse en una de las ideas más poderosas de la matemática: la relación de dependencia entre magnitudes. Una función no es simplemente una fórmula o una ecuación, sino un modo de expresar cómo el cambio en una cantidad influye directamente sobre otra. En términos generales, una función es una correspondencia que, a cada elemento de un conjunto denominado **dominio**, le asigna un único elemento de otro conjunto llamado **codominio**. Este principio de correspondencia única es lo que distingue a las funciones de otras relaciones más generales (Apostol, 2013; Stewart, 2016).

En notación moderna, se escribe $\mathbf{f : A \rightarrow B}$, donde A representa el dominio y B el codominio, de modo que para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ existe un único valor $\mathbf{f(x)} \in \mathbf{B}$. El conjunto de todos los valores obtenidos, es decir, los resultados de aplicar la función, se denomina rango o imagen. Esta formalización, consolidada a partir de los trabajos de Dirichlet y Cauchy en el siglo XIX, permitió unificar bajo un mismo concepto las relaciones algebraicas, geométricas y analíticas que anteriormente se consideraban separadas (Boyer & Merzbach, 2011).

Desde una perspectiva algebraica, la función puede entenderse como una *regla de correspondencia* que asocia valores numéricos siguiendo una ley determinada

Por ejemplo, en la función $\mathbf{f(x) = 2x + 3}$ (véase Figura 1), cada valor de "x" genera uno y solo un valor de $\mathbf{f(x)}$. Aquí, la variable independiente "x" actúa como punto de partida, mientras que la variable dependiente $\mathbf{y = f(x))}$ expresa el resultado de aplicar la ley de correspondencia.

Figura 1.
Representación de la función $f(x) = 2x + 3$



Nota: Elaboración propia.

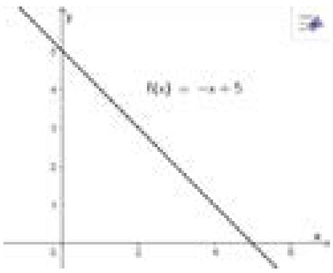
Sin embargo, esta aparente simplicidad esconde una gran riqueza conceptual, pues detrás de cada función existe una estructura lógica que modela fenómenos de crecimiento, movimiento, costo, probabilidad o cambio (Larson & Edwards, 2019).

El carácter funcional de las matemáticas se hace evidente cuando se analiza cómo las variables interactúan. En la vida cotidiana, casi todo fenómeno puede expresarse mediante una relación funcional: la distancia recorrida depende del tiempo, la temperatura depende de la altitud, o la ganancia económica depende del número de productos vendidos. En todos estos casos, las matemáticas ofrecen una manera precisa de describir y predecir comportamientos, trasladando el lenguaje de la realidad al lenguaje simbólico.

Didácticamente, la noción de correspondencia entre variables se construye de manera progresiva. Los estudiantes suelen iniciarse reconociendo patrones numéricos o gráficos antes de comprender el rigor formal de la definición. Según Duval (2006), este proceso requiere transitar entre diferentes registros de representación: verbal, tabular, algebraico y gráfico, para interiorizar que una misma relación puede expresarse de múltiples maneras.

Ejemplo: Un depósito de agua contiene inicialmente 5 litros. Cada minuto, la válvula de drenaje libera 1 litro de agua de forma constante. La cantidad de agua que queda en el depósito se puede expresar mediante la función $\mathrm{y} = -\mathrm{x} + 5$ (véase la Figura 2). donde “y” representa la cantidad de agua (en litros) y “x” el tiempo transcurrido (en minutos).

Figura 2.
Representación de la función $f(x) = -x + 5$



Nota: Elaboración propia.

Esta función muestra una correspondencia lineal decreciente: a medida que transcurre el tiempo, el volumen de agua disminuye de manera regular hasta vaciarse por completo. En este caso, la cantidad de agua depende del tiempo: a cada minuto transcurrido le corresponde una cantidad única de agua restante.

Apoyo didáctico: Este ejemplo permite comprender que una función expresa una correspondencia única entre dos variables. Aquí, el tiempo “x” determina directamente el volumen de agua “y”.

- El **registro verbal** conecta el contexto con el lenguaje simbólico.
- El **registro tabular** facilita la detección del patrón de cambio constante.
- El **registro algebraico** formaliza y generaliza la relación.
- El **registro gráfico** ofrece una representación visual del comportamiento lineal.

Como destaca Duval (2006), el aprendizaje profundo del concepto de función requiere coordinación entre los distintos registros de representación, lo que posibilita al estudiante interpretar, traducir y explicar una misma relación desde diversas perspectivas matemáticas.

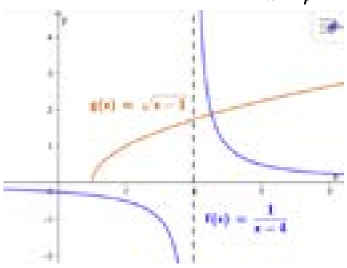
Dominio, rango y notación funciona

En el estudio de las funciones, comprender el **dominio**, el **rango** y la **notación funcional** es fundamental para interpretar correctamente la relación entre las variables y el significado matemático de cada expresión. Estos tres componentes definen el alcance y la coherencia de una función, pues permiten establecer con precisión qué valores son válidos para la variable independiente, qué resultados pueden obtenerse y cómo se expresa la correspondencia entre ambas. Como señala Stewart (2016), dominar estas ideas no solo refuerza la comprensión algebraica, sino que también prepara al estudiante para interpretar el comportamiento de los modelos en contextos reales.

El dominio representa el conjunto de todos los valores que puede asumir la variable independiente, es decir, los números que tienen sentido dentro de la relación funcional. Determinar el dominio de una función implica reconocer las restricciones naturales del modelo: evitar divisiones entre cero, raíces pares de números negativos o expresiones que no poseen significado en el campo de los números reales.

Por ejemplo, en la función $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}-4}$, el dominio excluye el valor x = 4 porque haría indefinida la operación. De forma similar, en $\mathrm{g(x)} = \sqrt{\mathrm{x}-1}$, los valores válidos son aquellos donde $\mathrm{x} \geq 1$ (véase Figura 3). Como subrayan Larson y Edwards (2019), identificar el dominio no es un proceso mecánico, sino un ejercicio de razonamiento que combina intuición, análisis algebraico y sentido del contexto.

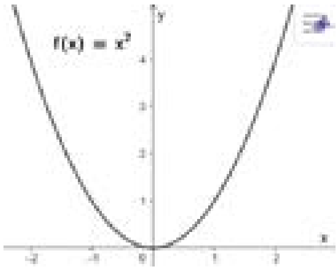
Figura 3.
Representación de las funciones $f(x) = \frac{1}{x-4} y g(x) = \sqrt{x-1}$



Nota: Elaboración propia.

El rango, también conocido como imagen, es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente. Se obtiene evaluando la función sobre todos los elementos del dominio y analizando los resultados posibles. En el caso de f(x)= x^2 (Figura 4), por ejemplo, el rango está formado por los números reales no negativos, ya que el cuadrado de cualquier número no puede ser negativo.

Figura 4.
Representación de la función $f(x) = x^2$



Nota: Elaboración propia.

Comprender el rango permite predecir el comportamiento de la función y anticipar su representación gráfica, estableciendo límites superiores e inferiores para los valores de salida (Blitzer, 2018). Además, el estudio del rango enseña a los estudiantes a interpretar las funciones no solo como ecuaciones estáticas, sino como procesos de transformación donde cada valor de entrada produce un efecto determinado.

La *notación funcional* $(\mathrm{y} = \mathrm{f(x)})$ fue introducida por Euler en el siglo XVIII para simplificar la escritura de las correspondencias entre variables. Al expresar $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$, se indica que la variable dependiente "y" depende de "x" mediante la regla o ley de formación definida por "f". Esta notación, aparentemente sencilla, encierra una gran profundidad conceptual, ya que permite visualizar la relación entre las variables como una operación mental de transformación. Apostol (2013) explica que esta forma simbólica fue clave para el desarrollo del análisis matemático, porque unificó el estudio de ecuaciones, curvas y fenómenos bajo una misma estructura formal.

Apoyo didáctico: Desde una mirada didáctica, comprender dominio, rango y notación funcional requiere promover la articulación entre diferentes registros de representación: verbal, tabular, algebraico y gráfico. Duval (2006) argumenta que la comprensión auténtica de una función surge cuando el estudiante logra pasar de un registro a otro sin perder el significado de la relación.

El uso de herramientas tecnológicas como **GeoGebra** o **Desmos** resulta particularmente valioso para analizar el dominio y el rango, pues permite observar de manera dinámica cómo la variación de **"x"** altera el comportamiento de $\mathrm{f(x)}$. Según Hohenwarter y Jones (2007), estas tecnologías fortalecen la conexión entre el razonamiento algebraico y la interpretación geométrica, ayudando al estudiante a comprender que cada expresión funcional es un modelo que describe una situación del mundo real.

Formas de representación: verbal, tabular, algebraica y gráfica

El estudio de las funciones adquiere verdadero sentido cuando se comprende que no existe una única manera de representarlas. En la práctica matemática, las funciones se manifiestan a través de distintos lenguajes (verbal, tabular, algebraico y gráfico) que, en conjunto, conforman un sistema de significados complementarios. Como afirma Duval (2006), comprender una función no depende solo de manipular símbolos, sino de ser capaz de cambiar de registro sin perder el sentido de la relación. Este tránsito entre formas de representación es el que permite al estudiante conectar lo concreto con lo abstracto, lo numérico con lo visual, y lo intuitivo con lo formal.

La representación verbal constituye el punto de partida más natural, porque utiliza el lenguaje cotidiano para describir cómo una magnitud depende de otra. Frases como "la distancia recorrida aumenta a medida que pasa el tiempo" o "la temperatura disminuye al ascender en altitud" son ejemplos de relaciones funcionales expresadas en palabras. Esta forma inicial, como señalan Hiebert y Lefevre (1986), es esencial para que el estudiante construya significado antes de enfrentarse al simbolismo. Traducir una situación verbal en términos matemáticos implica interpretar, abstraer y seleccionar las variables relevantes, lo que convierte el lenguaje natural en una puerta de entrada a la modelación algebraica.

Por su parte, la representación tabular organiza los datos en pares ordenados que muestran la relación entre las variables. Esta forma es muy útil para explorar patrones numéricos y regularidades en contextos reales. Según Sullivan (2016), trabajar con tablas permite al estudiante visualizar cómo pequeños cambios en la variable independiente generan variaciones en la dependiente, fortaleciendo la noción de continuidad y cambio. Larson y Edwards (2019) añaden que la representación tabular actúa como un puente entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. En el aula, este tipo de tareas promueve la observación, la comparación y la búsqueda de reglas que expliquen el comportamiento de los datos, preparando el terreno para la formulación de la expresión algebraica.

La *representación algebraica*, en cambio, ofrece la forma más compacta y general del pensamiento funcional. A través de una fórmula, se expresa la regla que vincula las variables: $\mathrm{f(x) = 2x + 5}$ o $\mathrm{g(x) = x^2 - 3x + 2}$.

Esta notación, introducida por Euler en el siglo XVIII, permite calcular, predecir y analizar con precisión el comportamiento de las funciones. Apostol (2013) destaca que el álgebra traduce el razonamiento lógico en un lenguaje universal, capaz de representar desde relaciones simples hasta sistemas complejos. Sin embargo, Duval (2006) advierte que la dificultad de muchos estudiantes radica en mantener el significado al pasar del enunciado verbal a la fórmula, pues este salto exige una conversión cognitiva que no es automática.

Finalmente, la representación gráfica aporta una visión global del comportamiento de la función. A través del plano cartesiano, las relaciones se convierten en formas visuales que permiten interpretar con facilidad tendencias, máximos, mínimos, intersecciones y simetrías.

Tabla 1.
Representación tabular

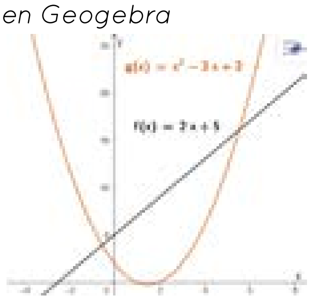
x	$f(x) = 2x + 5$	$f(x) = x^2 - 3x + 2$
1	7	0
2	9	0
3	11	2
4	13	6
5	15	12

Nota: Elaboración propia.

Blitzer (2018) afirma que la gráfica transforma la función en un objeto perceptible, capaz de comunicar ideas matemáticas de manera inmediata. Además, según Stewart (2016), las representaciones visuales favorecen el razonamiento intuitivo y ayudan a detectar propiedades que en el lenguaje algebraico pueden pasar inadvertidas (véase Figura 5).

El uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra o Desmos amplía aún más estas posibilidades, al permitir experimentar con los parámetros y observar en tiempo real cómo se modifica la forma de la función (Hohenwarter & Jones, 2007). Esta interacción directa entre lo simbólico y lo visual convierte la enseñanza en una experiencia exploratoria que estimula la curiosidad y la comprensión profunda.

Figura 5.
Representación gráfica en Geogebra



Nota: Elaboración propia.

Apoyo didáctico: Desde una mirada didáctica más amplia, Godino y Batanero (1998) sostienen que la comprensión de los objetos matemáticos se construye socialmente a través del intercambio entre diferentes formas de representación y de los significados que cada una encierra. En este sentido, las cuatro representaciones no son etapas lineales, sino espacios interdependientes de pensamiento. La verbal conecta con la experiencia, la tabular organiza los datos, la algebraica formaliza la regla y la gráfica la hace visible. Solo al articularlas entre sí se alcanza una comprensión integral del concepto de función. Como concluye Duval (2006), enseñar a relacionar registros es enseñar a pensar matemáticamente, pues permite al estudiante pasar de manipular signos a comprender relaciones.

En definitiva, cada forma de representación ofrece una ventana distinta hacia la comprensión de las funciones. La enseñanza de este tema no debería reducirse a la práctica mecánica de fórmulas, sino convertirse en un proceso de exploración donde los estudiantes puedan ver, decir, calcular y argumentar la misma relación desde diferentes perspectivas.

Clasificación y tipos de funciones algebraicas

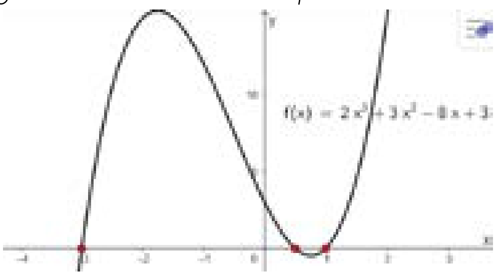
Las funciones algebraicas constituyen el núcleo del pensamiento matemático escolar y universitario. A través de ellas se modelan las formas más elementales de relación entre magnitudes y se establece el vínculo entre el razonamiento simbólico y la realidad cuantitativa. Su estudio no se limita a la manipulación de expresiones, sino que permite comprender cómo el lenguaje algebraico estructura el pensamiento lógico y el análisis funcional. Tal como explica Stewart (2016), una función algebraica es aquella que puede expresarse mediante un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división o radicación aplicadas a la variable independiente. Esto las distingue de las **funciones trascendentes**, como las exponenciales, logarítmicas o trigonométricas, que requieren procesos infinitos o no algebraizables.

Históricamente, el concepto de función algebraica emergió en el siglo XVII con los trabajos de Descartes y Viète, quienes establecieron una conexión entre expresiones simbólicas y representaciones geométricas. Descartes introdujo el sistema de coordenadas cartesianas que permitió visualizar relaciones algebraicas en el plano, mientras que Viète consolidó el uso de letras para representar cantidades variables. Desde entonces, las funciones algebraicas se convirtieron en una herramienta central para describir fenómenos naturales, físicos y económicos mediante leyes expresables en forma de ecuaciones (Boyer & Merzbach, 2011).

Funciones polinómicas: lineales, cuadráticas, cúbicas y de grado superior

En términos generales, las funciones algebraicas se clasifican según su **estructura** y **grado**, destacando las funciones polinómicas, racionales, con radicales y con valor absoluto. Cada una representa una forma particular de dependencia entre variables, y su análisis permite al estudiante reconocer regularidades, simetrías y comportamientos de cambio. Según Larson y Edwards (2019), esta clasificación no solo tiene valor formal, sino que ayuda a desarrollar la intuición sobre el comportamiento de los modelos matemáticos y su utilidad en la resolución de problemas reales. Las funciones polinómicas son las más básicas y, al mismo tiempo, las más versátiles. Se expresan en la forma general $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde los coeficientes a_i son números reales y el exponente mayor n determina su grado (véase Figura 6).

Figura 6.
Representación gráfica de una función polinómica



Nota: Elaboración propia.

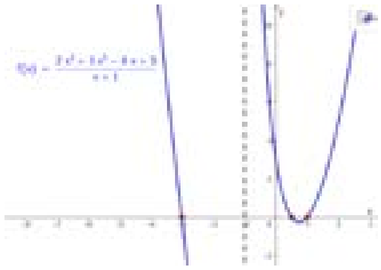
Cada una modela una forma distinta de variación: las lineales representan relaciones proporcionales y trayectorias rectas; las cuadráticas, movimientos parabólicos como la caída libre o la trayectoria de un proyectil; y las cúbicas, fenómenos con puntos de inflexión, donde la curvatura cambia de sentido (Blitzer, 2018). Stewart (2016) señala que los polinomios constituyen una base conceptual imprescindible porque sus propiedades sirven como modelo para comprender funciones más complejas en el cálculo.

Las **funciones racionales**, en cambio, amplían el horizonte algebraico al incorporar divisiones entre polinomios. Se definen como:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$ (véase Figura 7). Este tipo de funciones introduce conceptos avanzados como puntos de indeterminación, asíntotas verticales y horizontales, y discontinuidades, elementos esenciales para el estudio posterior de los límites.

Figura 7.
Representación gráfica de una función racional



Nota: Elaboración propia.

Sullivan (2016) destaca que el análisis de funciones racionales prepara al estudiante para razonar sobre el comportamiento infinitesimal, pues obliga a distinguir entre valores permitidos, prohibidos y límites de aproximación. Además, su representación gráfica revela cómo los comportamientos algebraicos se traducen en estructuras geométricas, mostrando la profunda conexión entre ambos campos.

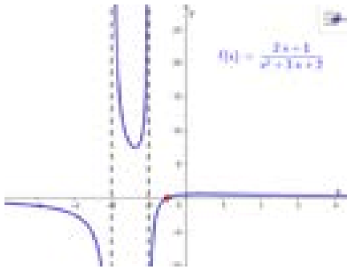
Esta estructura, aparentemente simple, encierra una enorme riqueza conceptual. Según Stewart (2016), las funciones racionales representan un punto de encuentro entre el álgebra y el análisis, pues en ellas aparece de manera natural la noción de restricción del dominio y de comportamiento límite, que serán fundamentales en el estudio del cálculo diferencial e integral. La condición $\mathrm{Q(x)} \neq 0$ no solo es una exigencia algebraica, sino una frontera que marca los límites de existencia de la función. Allí donde el denominador se anula, la función deja de estar definida, generando los denominados puntos de indeterminación.

La estructura de una función racional puede adoptar múltiples formas, pero todas comparten la característica de expresar una relación no lineal entre las variables. Si el grado del polinomio del numerador es menor que el del denominador, se dice que la función es *propia*; si es igual o mayor, se denomina **impropia**. Este criterio, más allá de su formalismo, permite anticipar el tipo de comportamiento que tendrá la función en el infinito.

Por ejemplo, en $\mathrm{f(x)} = \dfrac{2\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+2}$,

el crecimiento del denominador provoca que los valores de $\mathrm{f(x)}$tiendan a cero a medida que **"x"** aumenta, lo cual se traduce gráficamente en una asíntota horizontal (véase Figura 8). En cambio, si el grado del numerador es mayor, la función tenderá hacia el infinito, mostrando una asíntota oblicua (Sullivan, 2016).

Figura 8.
Representación gráfica de una función racional propia



Nota: Elaboración propia.

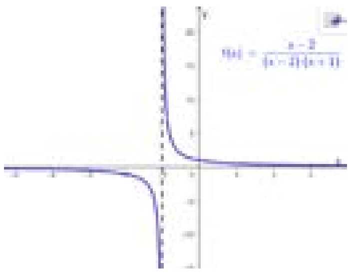
El dominio de una función racional está formado por todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador. Determinarlo implica resolver la ecuación $Q(x) = 0$ y excluir sus soluciones del conjunto de los números reales. En el ejemplo anterior, $Q(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$ produce los valores $x = -1$ y $x = -2$, los cuales son puntos de indeterminación. Esto significa que, en dichos valores, la función no existe, y su representación gráfica mostrará discontinuidades o rupturas verticales. Como señalan Larson y Edwards (2019), este análisis del dominio prepara el pensamiento del estudiante para comprender la noción de continuidad y de límite, al identificar que no todos los valores producen resultados válidos en una función racional.

Los puntos de indeterminación son, por tanto, elementos esenciales en el estudio de este tipo de funciones. En el plano cartesiano, suelen manifestarse como asíntotas verticales o huecos en la gráfica, dependiendo de si el término problemático del denominador se cancela o no con un factor del numerador. Si, por ejemplo,

$$f(x) = \frac{(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

(véase Figura 9), la función presenta un hueco en$x = 2$ ya que el factor se simplifica y una asíntota vertical en $x = 1$, donde el denominador permanece nulo.

Figura 9.
Representación gráfica de puntos de indeterminación



Nota: Elaboración propia.

Stewart (2016) explica que estos casos son didácticamente valiosos porque ayudan a los estudiantes a distinguir entre errores de cálculo y restricciones estructurales de la función. Comprender la diferencia entre una discontinuidad evitable y una no evitable implica desarrollar una mirada más analítica y rigurosa del comportamiento funcional.

Desde una perspectiva gráfica, las funciones racionales muestran comportamientos muy variados: pueden presentar intersecciones con los ejes, asíntotas, simetrías y regiones donde los valores de $f(x)$ crecen o decrecen abruptamente. Blitzer (2018) destaca que la visualización de estos rasgos facilita la comprensión del dominio y de los puntos de indeterminación, ya que el estudiante puede "ver" las consecuencias de las restricciones algebraicas.

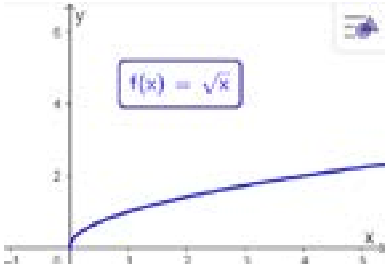
En este sentido, el uso de herramientas tecnológicas como **GeoGebra** o **Desmos** resulta de gran valor pedagógico, pues permite observar en tiempo real cómo la modificación de los coeficientes afecta la forma y las discontinuidades de la gráfica (Hohenwarter & Jones, 2007).

Apoyo didáctico: Las funciones racionales son una oportunidad privilegiada para vincular el razonamiento algebraico con la interpretación gráfica. Duval (2006) sostiene que el aprendizaje significativo ocurre cuando el estudiante logra coordinar distintos registros de representación, de modo que la estructura algebraica de la función se refleje coherentemente en su gráfica y en su descripción verbal. El análisis del dominio y de los puntos de indeterminación favorece esta articulación, al mostrar que detrás de cada símbolo existe un significado geométrico y conceptual. Por ello, enseñar funciones racionales no debería limitarse a simplificar fracciones algebraicas, sino a promover la comprensión de cómo las operaciones modifican los espacios de validez y las formas de representación.

Otra categoría importante son las funciones con radicales, que incluyen raíces cuadradas, cúbicas u otras expresiones radicales. Estas funciones presentan restricciones en el dominio, ya que los valores negativos bajo una raíz par no tienen solución real.

Por ejemplo, en la función $f(x) = \sqrt{x-1}$, el dominio está limitado a $x \geq 1$ (Figura 10). Larson y Edwards (2019) afirman que este tipo de funciones permite introducir la noción de "condición de existencia", enseñando al estudiante que el significado de una función depende del conjunto en el cual está definida. Su análisis promueve una comprensión rigurosa de los conceptos de dominio y rango, que son el fundamento del pensamiento funcional moderno.

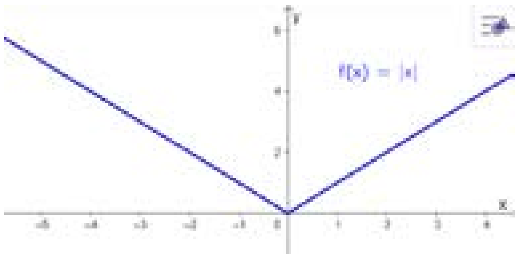
Figura 10.
Representación gráfica de funciones con radicales



Nota: Elaboración propia.

Por otra parte, las funciones con valor absoluto completan la clasificación básica de las funciones algebraicas. Su expresión general, $\mathbf{f(x) = |x|}$ (véase Figura 11), representa la distancia de un número al origen de la recta real, sin importar su signo. La gráfica de esta función tiene forma de "V" y muestra una *"discontinuidad en la pendiente"*, lo que la convierte en un excelente ejemplo para analizar la noción de no derivabilidad en un punto. Según Duval (2006), el estudio de este tipo de funciones ayuda a los estudiantes a comprender que el significado de una expresión algebraica no es solo simbólico, sino también geométrico y conceptual.

Figura 11.
Representación gráfica de la función $f(x) = |x|$



Nota: Elaboración propia.

Propiedades fundamentales de las funciones algebraicas

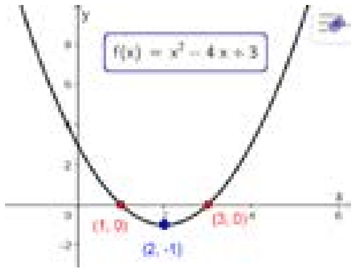
Las funciones algebraicas constituyen el eje estructural del pensamiento matemático elemental, pues permiten comprender la naturaleza de las relaciones entre variables y las leyes que gobiernan su comportamiento. Estas funciones, expresadas mediante un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y radicación, representan la base sobre la cual se construyen los modelos matemáticos más complejos. Su estudio no solo tiene un valor formal, sino que, como destaca Stewart (2016), ofrece una vía para desarrollar el razonamiento lógico y la capacidad de abstracción necesarias para avanzar hacia el cálculo y las funciones trascendentes.

Desde una perspectiva conceptual, las funciones algebraicas poseen propiedades fundamentales que las caracterizan y las diferencian de otros tipos de funciones. Dichas propiedades se refieren a su *dominio y rango, su continuidad, su simetría, su comportamiento de crecimiento o decrecimiento y su intersección con los ejes coordenados.*

Cada una de ellas brinda información esencial para interpretar, representar y analizar el comportamiento de una función, tanto de manera simbólica como gráfica. Sullivan (2016) señala que el dominio y el rango son los primeros elementos a considerar, pues definen el conjunto de valores para los cuales la función tiene sentido matemático.

Si tomamos el caso particular $\mathrm{f(x)=x^2-4x+3}$ (figura 12), su dominio es R, mientras que su rango es $\mathrm{f(x)}\geq -1$, dado que el vértice se encuentra en el punto (2,-1).

Figura 12.
Representación gráfica de las propiedades de la función algebraica $f(x)$



Nota: Elaboración propia.

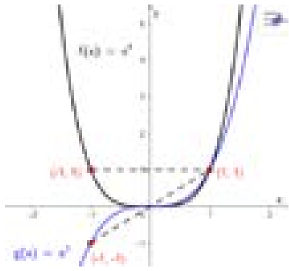
Otra propiedad esencial es la continuidad, entendida como la ausencia de rupturas, saltos o huecos en la gráfica de la función dentro de su dominio. Las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, lo que las convierte en modelos ideales para describir procesos naturales sin interrupciones, como trayectorias o variaciones de temperatura (Larson & Edwards, 2019). En cambio, las funciones racionales o radicales pueden presentar discontinuidades, puntos de indeterminación o asíntotas, lo que enriquece su estudio desde el punto de vista analítico y gráfico. Apóstol (2013) explica que el análisis de la continuidad en las funciones algebraicas es una introducción natural al concepto de límite, que más adelante permitirá comprender el cambio infinitesimal y la derivabilidad.

La función radical $\mathrm{f(x)}=\sqrt{\mathrm{x}-2}$. está definida únicamente para $\mathrm{x}\geq 2$, ya que la raíz cuadrada de un número negativo no pertenece al conjunto de los reales. En este caso, el dominio es $[2,\infty)$, y la función es continua en todo su dominio, pues no presenta saltos ni rupturas a partir de su punto inicial (2,0). Sin embargo, *no es continua en todo* $\mathbb{R}$, porque para $\mathbf{x} < \mathbf{2}$ no existe valor real de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

El comportamiento de crecimiento y decrecimiento constituye otra de las propiedades fundamentales. A través del análisis de los signos y valores de la variable independiente, se determina en qué intervalos la función aumenta o disminuye. Por ejemplo, la función lineal $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{mx} + \mathrm{b}$ crece si $\mathrm{m} > 0$, mientras que una función cuadrática $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ presenta un punto de cambio denominado vértice, que marca la transición entre crecimiento y decrecimiento. Stewart (2016) subraya que el análisis del crecimiento no solo tiene implicaciones algebraicas, sino también interpretativas, ya que permite representar procesos físicos o económicos que dependen del tiempo o de otras variables.

La simetría es otra propiedad distintiva. Una función se considera **par** si cumple $\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ como ocurre con las funciones cuadráticas o las de la forma $\mathrm{x}^2, \mathrm{x}^4, \ldots$ e **impar** si $\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = -\mathrm{f}(\mathrm{x})$ (véase Figura13), como sucede con las cúbicas o las de tipo $\mathrm{x}^3, \mathrm{x}^5, \ldots$

Figura 13.
Representación gráfica de las propiedades de simetría



Nota: Elaboración propia.

Esta característica, además de simplificar el análisis gráfico, revela patrones de comportamiento que reflejan la estructura de la función. Blitzer (2018) destaca que la simetría no solo facilita la interpretación visual, sino que también fomenta la comprensión estructural, ya que enseña a los estudiantes a identificar invariantes en medio del cambio.

Otra propiedad clave es la intersección con los ejes coordenados, que se determina al calcular los valores de la función cuando x=0 (intersección con el eje “Y”) y cuando $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$ (intersección con el eje “X”). Estas intersecciones permiten ubicar puntos de referencia en la gráfica y comprender el significado algebraico de las raíces o ceros de la función. Según Duval (2006), estos procesos de traducción entre los registros simbólico y gráfico son esenciales en la enseñanza del álgebra, ya que ayudan al estudiante a establecer conexiones entre expresiones analíticas y representaciones visuales, fortaleciendo su comprensión conceptual.

Composición de funciones e interpretación gráfica

La *composición de funciones* representa uno de los conceptos más significativos en el estudio del pensamiento algebraico y funcional, ya que permite comprender cómo distintas relaciones se integran para formar nuevas dependencias. A través de la composición, una función se aplica sobre el resultado de otra, generando una transformación encadenada que revela la naturaleza dinámica del lenguaje matemático. Formalmente, si se tienen dos funciones **"f"** y **"g"**, la composición se define como $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$, lo que significa que primero se evalúa $\mathrm{g}(\mathrm{x})$ y luego se aplica "f" al resultado. Esta estructura, como señala Stewart (2016), constituye una herramienta fundamental para modelar procesos complejos donde una variable intermedia conecta distintos fenómenos, como ocurre en la física, la economía o la biología.

Desde una perspectiva conceptual, la composición de funciones permite encadenar dependencias: una magnitud depende de otra, que a su vez depende de una tercera. Así, el pensamiento funcional se expande, pasando de relaciones simples a relaciones compuestas. Sullivan (2016) explica que este tipo de razonamiento desarrolla en el estudiante una visión sistémica del cambio, pues le permite reconocer cómo una modificación en la variable inicial afecta indirectamente a las demás

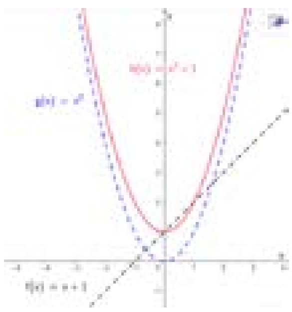
Por ejemplo, si

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} + 1 \text{ y } \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2,\ \mathrm{h}(\mathrm{x}) = (\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 + 1$$

muestra cómo la función cuadrática (Figura 14), al ser "transformada" por una función lineal, genera una nueva ley de correspondencia que conserva la naturaleza algebraica, pero altera su representación gráfica.

Figura 14.

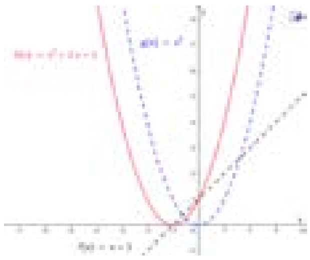
Representación gráfica de $h(x) = (f \circ g)(x)$



Nota: Elaboración propia.

La estructura de la composición evidencia una de las propiedades más potentes de las funciones: su capacidad de transformar espacios. Cada función actúa como una regla que asigna un conjunto de valores de entrada a un conjunto de salida; cuando se componen, esas transformaciones se encadenan, generando nuevas representaciones. Larson y Edwards (2019) subrayan que comprender la composición exige distinguir entre el orden de aplicación y la naturaleza de las funciones: $\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$ no es lo mismo que $\mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))$, y esta diferencia se refleja directamente en la forma de las gráficas (Figura 15). Este aspecto adquiere relevancia en el cálculo, donde la composición es la base para el estudio de la derivada de funciones compuestas, conocida como la regla de la cadena.

Figura 15.
Representación gráfica de $h(x) = (g \circ f)(x)$



Nota: Elaboración propia.

Desde el punto de vista gráfico, la composición de funciones puede interpretarse como una transformación progresiva del plano cartesiano. Cada función altera de manera específica las coordenadas del conjunto original. Por ejemplo, si $\mathrm{g}(\mathrm{x})$ produce una deformación parabólica y $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ aplica un desplazamiento o una dilatación, la composición $\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$integrará ambas transformaciones, resultando en una gráfica más compleja. Blitzer (2018) destaca que esta perspectiva visual es esencial para desarrollar la intuición matemática, ya que permite identificar cómo las operaciones algebraicas se reflejan geométricamente. Las traslaciones, reflexiones y escalas verticales o horizontales no son meras modificaciones formales, sino expresiones de la manera en que una función transforma a otra dentro del espacio cartesiano.

Apoyo didáctico: Desde un enfoque didáctico, la composición de funciones permite introducir al estudiante en el pensamiento relacional. Duval (2006) afirma que aprender matemáticas implica dominar la capacidad de pasar de un registro de representación a otro sin perder el significado de la relación. En este contexto, la composición ofrece un terreno ideal para integrar los registros algebraico y gráfico: lo que en una ecuación se expresa como una sustitución formal, en la gráfica se traduce en una deformación o desplazamiento visible. Comprender este vínculo ayuda a superar la visión mecanicista de la matemática, reemplazándola por una comprensión profunda del proceso funcional.

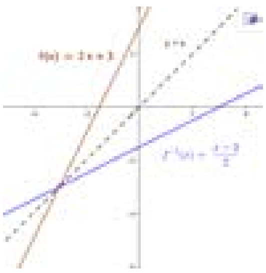
Además, la composición posee propiedades formales que fortalecen el razonamiento abstracto. Entre ellas destacan la no conmutatividad, ya mencionada, y la asociatividad, según la cual $\mathrm{f} \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{h}) = (\mathrm{f} \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{h}$. Estas propiedades, lejos de ser meras curiosidades simbólicas, reflejan cómo el orden y la estructura determinan los resultados en los sistemas matemáticos. Apostol (2013) considera que la comprensión de estas relaciones es un paso indispensable hacia el pensamiento estructural, pues permite visualizar las funciones como objetos que se combinan y se transforman entre sí dentro de un mismo marco lógico.

Función inversa: definición, condiciones y representación

La función inversa ocupa un lugar central en el estudio de las funciones algebraicas, pues expresa de manera simbólica y gráfica la idea de reversibilidad en las relaciones matemáticas. Mientras una función establece una correspondencia entre un conjunto de valores de entrada (dominio) y un conjunto de valores de salida (rango), su inversa deshace esa correspondencia, intercambiando los papeles de ambas variables. Así, si una función **“f”** transforma **“x”** en **“y”**, su inversa f^{-1} transforma “y” en “x” (Figura 16).

En palabras de Stewart (2016), la función inversa no solo revierte una operación, sino que refleja la estructura bidireccional del pensamiento funcional, mostrando cómo toda relación puede ser entendida desde dos perspectivas complementarias.

Figura 16.
Representación gráfica de la función inversa de $f(x)$



Nota: Elaboración propia.

Formalmente, se dice que una función **“f”** posee una inversa si y solo si es biyectiva, es decir, inyectiva (cada valor de salida corresponde a un único valor de entrada) y sobreyectiva (cada valor del rango es alcanzado por algún elemento del dominio). Esta condición garantiza que el proceso pueda “revertirse” sin ambigüedades. Si $\mathrm{f(a) = b}$, entonces. Apostol (2013) destaca que la noción de inversa traduce el principio de simetría en el ámbito funcional, mostrando que las leyes matemáticas pueden expresarse en doble sentido sin perder su coherencia interna.

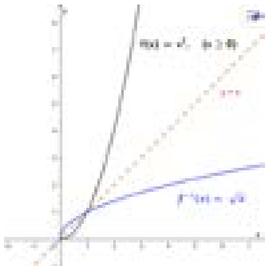
En términos gráficos, la función inversa se representa como el reflejo de la función original respecto a la recta y=x. Esta simetría visual revela la correspondencia mutua entre los pares ordenados (x,y) y (y,x).

Por ejemplo, si $\mathrm{f(x) = 2x + 3.}$, su inversa es: $\mathrm{f^{-1}(b) = \frac{x-3}{2}}$

La gráfica de $\mathrm{f^{-1}}$ puede obtenerse intercambiando las coordenadas de todos los puntos de **"f"** lo cual genera una imagen especular respecto a la diagonal del primer cuadrante. Sullivan (2016) resalta que este enfoque visual ayuda a los estudiantes a comprender el concepto de reversibilidad más allá del simbolismo algebraico, pues permite identificar que una función y su inversa son, en esencia, transformaciones opuestas dentro del mismo espacio cartesiano.

Por ejemplo, la función cuadrática $\mathrm{f(x) = x^2}$ no es inyectiva (véase Figura 17), ya que tanto $\mathrm{f(2) = 4}$ como $\mathrm{f(-2) = 4}$; para cada valor positivo del rango existen dos valores en el dominio.

Figura 17.
Representación gráfica de la función inversa de $f(x)$



Nota: Elaboración propia.

El *proceso de obtención de una función inversa es, en sí mismo, una aplicación del razonamiento algebraico.* Los pasos básicos son:

1. Escribir la función en forma de ecuación: $\mathrm{y = f(x)}$.
2. Intercambiar las variables: $\mathrm{x = f(y)}$.
3. Despejar "y" en términos de "x", obteniendo así $\mathrm{y = f^{-1}(x)}$.

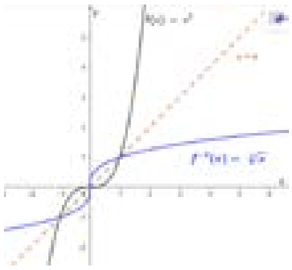
Este procedimiento, según Larson y Edwards (2019), no solo enseña técnicas de manipulación algebraica, sino también la capacidad de interpretar el sentido de una relación funcional, lo cual resulta indispensable para abordar posteriormente temas como la derivación de funciones inversas o la transformación de modelos en ciencias aplicadas. No obstante, no todas las funciones poseen una inversa definida en todo su dominio

En estos casos, es necesario restringir el dominio para que la función se vuelva uno a uno. De este modo, si se limita $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=\mathrm{x}^{2}$ al dominio x ≥ 0, la función resulta inyectiva y su inversa será $\mathrm{f}^{-1}\left(\mathrm{x}\right)=\sqrt{\mathrm{x}}.$. Blitzer (2018) explica que este tipo de razonamientos refuerza la comprensión del papel que juega el dominio en la estructura funcional, al demostrar que la existencia de la inversa depende de la unicidad de las correspondencias.

Desde una perspectiva más general, las funciones lineales, racionales, radicales y polinómicas de grado impar suelen poseer inversas globales o parciales, dependiendo de su forma. Por ejemplo, la función cúbica $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=\mathrm{x}^{3}$ (figura 18) tiene inversa en todo $\mathbb{R}$, dada por:

$$\mathrm{f}^{-1}\left(\mathrm{x}\right)=\sqrt[3]{\mathrm{x}}$$

Figura 18.
Representación gráfica de la función inversa de $f(x)$



Nota: Elaboración propia.

En cambio, las funciones racionales pueden presentar restricciones derivadas de los puntos de indeterminación o de discontinuidades, lo que exige analizar cuidadosamente su dominio antes de determinar la inversa. Stewart (2016) señala que este proceso constituye una introducción natural al pensamiento analítico, donde cada propiedad algebraica tiene un reflejo geométrico y conceptual.

Apoyo didáctico: la enseñanza de las funciones inversas debe vincular el razonamiento simbólico con la visualización. Duval (2006) sostiene que la comprensión profunda surge cuando el estudiante logra articular distintos registros de representación: verbal, algebraico, tabular y gráfico, sin perder el significado de la relación. En este sentido, el estudio de la función inversa ofrece una oportunidad privilegiada para practicar la traducción entre registros, pues lo que algebraicamente se expresa como el intercambio de variables, gráficamente se visualiza como una simetría. Hohenwarter y Jones (2007) subrayan que el uso de herramientas digitales como GeoGebra permite explorar esta simetría de manera interactiva, reforzando la comprensión del vínculo entre las operaciones simbólicas y sus efectos geométricos.

Transformaciones y análisis gráfico

El estudio de las transformaciones y el análisis gráfico de las funciones constituye un momento clave en la formación matemática, porque permite comprender cómo los cambios en una expresión simbólica se reflejan directamente en su representación visual. Al desplazar, reflejar o escalar una función base, el estudiante desarrolla una percepción más profunda del vínculo entre el álgebra y la geometría, entendiendo que cada modificación tiene un significado y un efecto concreto sobre la forma de la curva. Esta relación entre símbolo y figura convierte al análisis gráfico en una experiencia exploratoria y dinámica, donde el razonamiento abstracto se complementa con la observación visual. El uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra o Desmos amplía aún más esta experiencia, pues ofrece la posibilidad de manipular los parámetros en tiempo real y observar cómo las transformaciones actúan sobre la función, promoviendo una comprensión intuitiva, creativa y significativa del comportamiento matemático.

Traslaciones horizontales y verticales

El estudio de las traslaciones de funciones es uno de los primeros acercamientos que permite a los estudiantes comprender que el álgebra no se limita a la manipulación simbólica, sino que constituye un lenguaje que describe movimientos, transformaciones y relaciones entre magnitudes. En términos generales, una traslación consiste en desplazar la gráfica de una función sin modificar su forma ni su orientación, lo que introduce la idea de invariancia estructural, es decir, que el comportamiento de la función se conserva aunque cambie su posición en el plano (Stewart, 2016).

Desde el punto de vista analítico, si $\mathrm{f(x)}$ es una función base, entonces $\mathrm{f(x-h)}$ produce una traslación horizontal, mientras que $\mathrm{f(x)+k}$ genera una traslación vertical. El parámetro **"h"** controla el desplazamiento a lo largo del eje "x": si $\mathrm{h}>0$, la gráfica se mueve hacia la derecha, y si $\mathrm{h}<0$,, se desplaza hacia la izquierda. Por su parte, el parámetro "k" determina el desplazamiento a lo largo del eje "y": valores positivos mueven la función hacia arriba, y negativos, hacia abajo. Esta dualidad es la base del concepto de familias de funciones, donde los cambios en los parámetros generan versiones desplazadas de una misma estructura algebraica (Larson & Edwards, 2019).

Comprender las traslaciones permite visualizar la dependencia funcional entre variables: cada punto (x,y) de la función original se convierte en **(x+h, y+k)** después de aplicar la transformación.

Este proceso puede representarse mediante vectores de traslación

$$\overrightarrow{\mathrm{t}}=\left(\mathrm{h},\mathrm{k}\right),$$

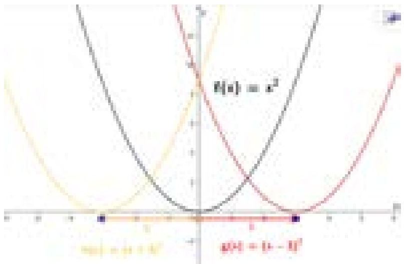
que expresan el desplazamiento simultáneo en ambas direcciones del plano. Tal representación vectorial resulta útil para introducir la noción de transformación geométrica, un puente natural entre el álgebra y la geometría analítica (Anton et al. 2020).

Por ejemplo, para la función cuadrática $f(x) = x^2$, la transformación

$$f\left(x - 3\right) = (x - 3)^2$$

genera un movimiento de la parábola tres unidades hacia la derecha (Figura 19). Este tipo de desplazamiento no altera la forma ni la concavidad de la gráfica, sino únicamente s u ubicación sobre el eje "x" (Larson & Edwards, 2019).

Figura 19.
Representación de traslaciones horizontales



Nota: Elaboración propia.

En cambio, las traslaciones verticales se producen al sumar o restar un valor fuera del argumento de la función, es decir, $f(x) + k$ o $f(x) - k$. Si se agrega un valor positivo "k", la gráfica se traslada hacia arriba, y si se resta, se desplaza hacia abajo.

Este tipo de modificación refleja la acción de un operador constante sobre el rango de la función, alterando los valores de salida, pero conservando la relación estructural entre las variables (Anton et al., 2020).

Un ejemplo ilustrativo lo constituye la familia de funciones cuadráticas:

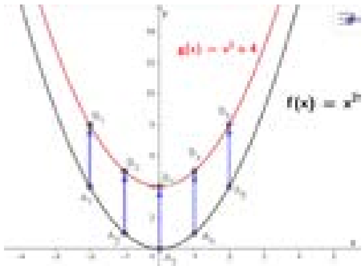
$$f\left(x\right) = (x - h)^2 + k$$

En ella, el vértice se traslada desde el origen al punto (h,k), conservando la forma parabólica. Al modificar los valores de "h" y "k" en un entorno dinámico, el estudiante observa cómo la parábola se desplaza, pero no cambia su curvatura ni su concavidad, lo que refuerza la idea de estructura invariante. Por ejemplo, la transformación:

$$f\left(x\right) = x^2 + 4$$

(véase Figura 20) desplaza la parábola original $f(x) = x^2$ cuatro unidades verticalmente hacia arriba.

Figura 20.
Representación de traslaciones verticales



Nota: Elaboración propia.

De acuerdo con Tall y Vinner (1981), esta experiencia visual ayuda a construir una imagen conceptual del objeto matemático, facilitando el paso del pensamiento operacional al estructural.

Apoyo didáctico: las traslaciones se convierten en una oportunidad para desarrollar pensamiento funcional y visualización dinámica. Según Godino, Batanero y Font (2007), los estudiantes deben ser capaces de pasar del registro algebraico al gráfico y viceversa, comprendiendo que los símbolos en una ecuación tienen un correlato geométrico que puede interpretarse visualmente.

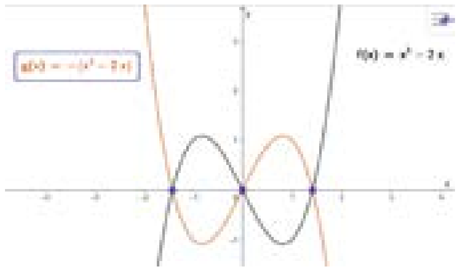
Esta articulación entre registros semióticos favorece el aprendizaje significativo, ya que permite al estudiante establecer relaciones y anticipar efectos de los parámetros sin necesidad de realizar cálculos extensos.

Reflexiones respecto a los ejes de coordenadas

En el contexto de las funciones algebraicas, las reflexiones respecto a los ejes de coordenadas constituyen un recurso fundamental para comprender la simetría y el comportamiento gráfico de polinomios, racionales y radicales. Estas transformaciones permiten observar cómo el signo que acompaña a una variable o a toda la función modifica su orientación en el plano cartesiano sin alterar su estructura algebraica esencial.

En términos didácticos, estudiar las reflexiones es enseñar al estudiante a “leer” la ecuación como una descripción de movimientos y formas, no solo como una relación numérica entre variables (Godino, Batanero & Font, 2007). Desde el punto de vista algebraico, cuando se refleja una función respecto al eje “x” (Figura 21), se obtiene la transformación $y = -f(x)$.

Figura 21.
Reflexión sobre el eje X de la función $f(x)$

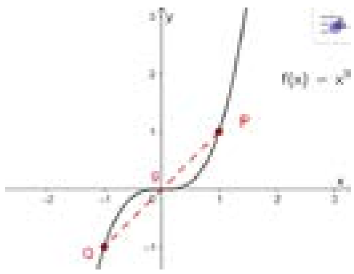


Nota: Elaboración propia.

Esta operación cambia el signo de todos los valores del rango, es decir, convierte las salidas positivas en negativas y viceversa. En las funciones polinómicas, este efecto produce un giro de 180° en torno al eje horizontal, sin modificar los ceros ni el grado de la función.

Por otro lado, la reflexión respecto al eje "y" se expresa como $\mathrm{f}(-\mathrm{x})$. En este caso, no se modifica el rango, sino el dominio: los valores positivos de **"x"** se asocian a los negativos y viceversa. Este tipo de simetría es común en funciones pares, como $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$ o $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^4$, cuyas gráficas son invariantes ante esta transformación. En cambio, las funciones impares, como $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3$ o $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^5$ (Figura 22), presentan simetría respecto al origen, ya que satisfacen la condición $\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = -\mathrm{f}(\mathrm{x})$.

Figura 22.
Reflexión sobre el eje X de la función $f(x)$

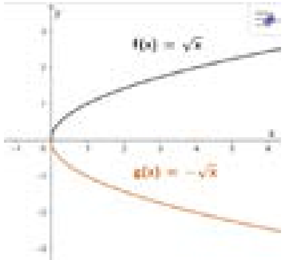


Nota: Elaboración propia.

En el caso de una función racional, como $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}}$, la reflexión respecto al eje "y" intercambia los cuadrantes I y II, mientras que la reflexión respecto al eje "x" intercambia los cuadrantes I y IV. Este doble movimiento evidencia que las simetrías algebraicas determinan la distribución de los signos de las variables, lo cual es crucial para el estudio de discontinuidades y límites (Anton et al., 2020).

En el caso de las funciones radicales, las reflexiones requieren mayor atención debido a las restricciones de dominio. Por ejemplo, la función $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{x}}$ (Figura 23) está definida solo para $\mathrm{x} \geq 0$.

Figura 23.
Reflexión sobre el eje Y de la función $f(x)$



Nota: Elaboración propia

Su reflexión respecto al eje "y", $\mathbf{f}\left(-\mathbf{x}\right) = \sqrt{-\mathbf{x}}.$, no tiene significado real, ya que generaría números imaginarios. En cambio, la reflexión respecto al eje "x", $-\sqrt{\mathbf{x}}$ es válida y produce una imagen simétrica en el cuarto cuadrante. Este análisis ayuda a los estudiantes a reconocer que no todas las transformaciones son posibles dentro del conjunto de los números reales, lo que refuerza la necesidad de comprender las condiciones de existencia de una función (Stewart, 2016).

Apoyo didáctico: Las reflexiones en funciones algebraicas tienen un alto valor formativo porque fomentan la visualización y la anticipación analítica. Cuando el estudiante aprende a identificar el signo que produce una inversión gráfica, puede predecir el comportamiento sin necesidad de calcular puntos. Este tipo de razonamiento contribuye a la generalización funcional, entendida como la capacidad de reconocer regularidades algebraicas en diversas familias de funciones (Sfard, 1991). Además, al comparar funciones como $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{x}^3, \ \ -\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right), \ \mathbf{f}\left(-\mathbf{x}\right)$, se estimula el pensamiento comparativo y la comprensión de invariantes estructurales, dos competencias esenciales en el tránsito del álgebra elemental al análisis.

El uso de herramientas tecnológicas, como GeoGebra, resulta particularmente potente en este proceso, pues permite superponer gráficas y observar de manera dinámica la simetría entre la función original y su reflejada. Al activar deslizadores que modifican el signo o la variable, el estudiante construye una imagen conceptual (Tall & Vinner, 1981) que refuerza su comprensión de la correspondencia algebraico-geométrica. Esta experiencia visual transforma la reflexión en un proceso exploratorio, donde el conocimiento surge del contraste entre la ecuación simbólica y su representación gráfica.

Escalamientos y compresiones de una función base

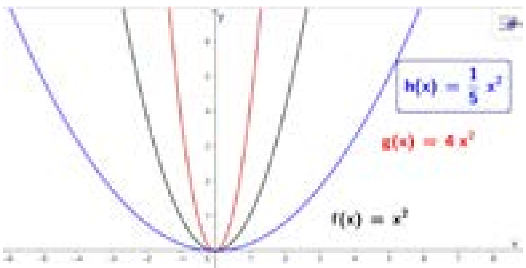
En el estudio de las funciones algebraicas, los escalamientos y compresiones constituyen un tema de especial relevancia porque permiten comprender cómo una misma estructura funcional puede adquirir diferentes configuraciones geométricas sin perder su identidad matemática. Estas transformaciones ponen de manifiesto la relación profunda entre el lenguaje simbólico del álgebra y el lenguaje visual de la geometría analítica, al mostrar que los coeficientes numéricos son operadores de cambio que alteran la proporción, la amplitud y la pendiente de las curvas. Como señalan Anton et al. (2020), dominar la interpretación de los parámetros multiplicativos es esencial para comprender el comportamiento de modelos algebraicos, ya que estos parámetros controlan la escala de crecimiento de las funciones.

Desde una perspectiva formal, si se considera una función base $\mathbf{f(x)}$, los escalamientos verticales se obtienen mediante la expresión $\mathbf{y = af(x).}$, donde el parámetro "a" multiplica directamente los valores del rango. Cuando $\mathbf{a > 1}$, se produce un estiramiento vertical, lo que amplifica las distancias de los puntos respecto al eje "x"; mientras que cuando $\mathbf{0 < a < 1,}$, se genera una compresión vertical, que acerca la gráfica hacia dicho eje.

Esta transformación afecta la magnitud de los valores de salida, pero no modifica la estructura algebraica ni el dominio de la función. En cambio, los escalamientos horizontales se expresan mediante $\mathbf{y = f(bx)}$: si $\mathbf{b > 1}$, la función se comprime horizontalmente; si 0<b<1, se estira horizontalmente. La diferencia fundamental radica en que, en los escalamientos horizontales, el efecto del parámetro "b" es inverso al valor que toma, lo cual resulta especialmente interesante para analizar el impacto del cambio de variable (Stewart, 2016).

La interpretación geométrica de estas transformaciones puede observarse con claridad en funciones polinómicas. En una función cuadrática general $\mathbf{f(x) = x^2}$, el valor de "a" determina el grado de curvatura de la parábola (Figura 24). Si $\mathbf{|a| > 1}$, la gráfica se vuelve más angosta, reflejando un crecimiento más pronunciado; si $\mathbf{|a| < 1}$, la parábola se abre, evidenciando un comportamiento más gradual.

Figura 24.
Escalamientos horizontales

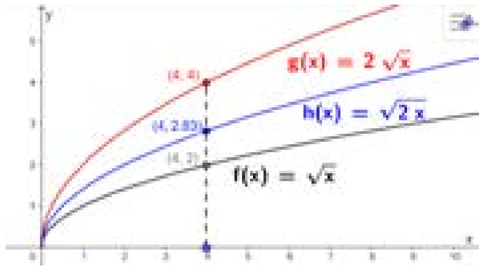


Nota: Elaboración propia.

Este mismo principio se extiende a las funciones cúbicas $\mathbf{f(x) = ax^3}$, donde "a" regula la pendiente de inflexión. En ambos casos, los escalamientos revelan la relación entre el coeficiente multiplicativo y la variación local de la función, sentando las bases conceptuales para la comprensión de la derivada como medida del cambio (Larson & Edwards, 2019).

En las funciones radicales, como $f(x) = \sqrt{x}$, el parámetro "a" determina la velocidad con la que la función crece: valores mayores de "a" hacen que la raíz crezca más rápidamente, mientras que valores menores la suavizan. Este comportamiento es particularmente útil en contextos aplicados donde el análisis de elasticidades o tasas de crecimiento requiere interpretar cómo los factores de escala modifican el modelo funcional (Anton et al., 2020).

Figura 25.
Escalamientos en funciones con radicales



Nota: Elaboración propia.

En las funciones racionales y radicales, el efecto de los escalamientos es igualmente revelador. Si se considera la función racional $f(x) = \frac{1}{x}$, un factor vertical "a" modifica la separación de las ramas respecto a los ejes asintóticos, generando una expansión o contracción simétrica. En cambio, un factor horizontal "b" altera la posición de las asíntotas sin modificar su forma, mostrando que las relaciones de proporcionalidad afectan tanto al dominio como al rango.

Apoyo didáctico: los escalamientos y compresiones favorecen el desarrollo del pensamiento relacional y la comprensión del comportamiento global de una función. Godino, Batanero y Font (2007) sostienen que el aprendizaje significativo de las funciones depende de la capacidad del estudiante para coordinar distintos registros semióticos. Los escalamientos se prestan de manera natural a esta coordinación, ya que el cambio de un coeficiente en la expresión algebraica tiene un efecto visual inmediato en la gráfica. La enseñanza de estas transformaciones debería, por tanto, fomentar la observación dinámica, el uso de conjeturas y la verificación empírica mediante representaciones interactivas.

Desde una mirada más profunda, los escalamientos y compresiones no son meras transformaciones gráficas, sino una manifestación de la proporcionalidad estructural del álgebra. La comprensión de estas transformaciones contribuye al desarrollo del pensamiento multiplicativo, un proceso cognitivo que permite entender el cambio relativo entre magnitudes y que constituye la base de nociones avanzadas como la pendiente, la elasticidad y la tasa de variación (Sfard, 1991). En otras palabras, cuando el estudiante percibe que "multiplicar por dos" no solo cambia los valores de la función, sino también la escala de su representación, está construyendo una comprensión operativa y estructural del significado del número en el contexto funcional.

Uso de GeoGebra y Desmos para explorar transformaciones
El empleo de herramientas tecnológicas como GeoGebra y Desmos ha revolucionado la manera en que se enseña y aprende la noción de función en el aula. Estas plataformas facilitan la observación directa de cómo los parámetros influyen en la forma, posición y orientación de una gráfica, haciendo visible aquello que en el plano algebraico suele permanecer abstracto. Según Artigue (2018), la integración de entornos digitales en la enseñanza de las matemáticas transforma la relación del estudiante con el conocimiento, porque permite construir significado a través de la experimentación y la visualización.

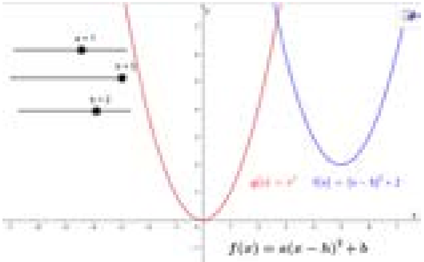
Transformaciones en funciones lineales y cuadráticas
Las funciones lineales constituyen el punto de partida ideal para explorar transformaciones básicas. En una función de la forma $\mathrm{f(x) = mx + b}$, el parámetro **"m"** determina la inclinación de la recta, mientras que "b" define su desplazamiento vertical. En GeoGebra, al manipular los deslizadores de estos parámetros, los estudiantes observan cómo la recta gira o se traslada sobre el plano cartesiano. Este ejercicio, aparentemente simple, permite comprender intuitivamente el concepto de pendiente y cómo las variaciones numéricas afectan directamente la representación gráfica. De acuerdo con Kieran (2018), tales experiencias fortalecen la capacidad de los estudiantes para reconocer regularidades funcionales y conectar diferentes registros de representación matemática.

En las funciones cuadráticas

$$\mathrm{f\left(x\right) = a(x - h)^2 + b}$$

(Figura 26), los parámetros cumplen un papel más complejo: "a" controla la apertura y orientación de la parábola, mientras que "h" y "b" determinan la posición del vértice. GeoGebra y Desmos permiten que los estudiantes visualicen cómo la parábola se desplaza o se estira conforme cambian estos valores.

Figura 26.
Transformaciones dinámicas en Geogebra de funciones cuadráticas



Nota: Elaboración propia.

Esta visualización facilita la comprensión estructural de la función, sin recurrir a cálculos formales. En palabras de Duval (2006), comprender una función implica poder traducirla entre registros algebraicos, gráficos y numéricos, proceso que estas herramientas potencian de forma natural.

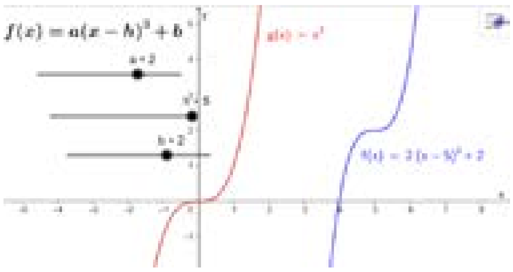
Transformaciones en funciones cúbicas y de valor absoluto
Al explorar funciones cúbicas, como:

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right) = \mathrm{a}(\mathrm{x}-\mathrm{h})^3 + \mathrm{b}$$

(Figura 27), los estudiantes descubren comportamientos gráficos que combinan simetrías y cambios de curvatura. En Desmos, el movimiento de los deslizadores permite visualizar cómo la gráfica se "estrecha" o "ensancha" al modificar "a", y cómo el punto central cambia de posición con **"h"** y **"b"**.

Esta experiencia ofrece una visión dinámica del cambio gradual en el comportamiento de la función sin recurrir al análisis derivativo, fomentando una comprensión basada en la observación directa del desplazamiento y la deformación (Stewart, 2021).

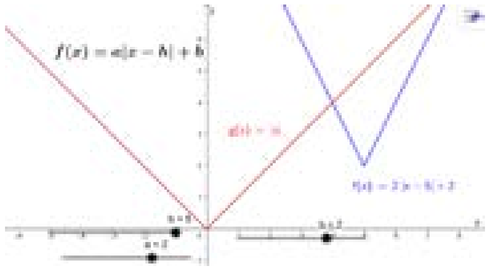
Figura 27.
Transformaciones dinámicas en Geogebra de funciones cuadráticas



Nota: Elaboración propia.

Las funciones de valor absoluto, $\mathbf{f(x)} = \mathrm{a}|\mathbf{x}-\mathbf{h}| + \mathrm{b}$, permiten analizar transformaciones con un punto angular bien definido. En GeoGebra, los estudiantes pueden identificar cómo los parámetros modifican la posición del vértice y la inclinación de las ramas, comprendiendo el efecto de los desplazamientos horizontales y verticales. Este tipo de función resulta particularmente útil para reflexionar sobre simetrías y sobre cómo una misma estructura algebraica puede producir diferentes configuraciones visuales.

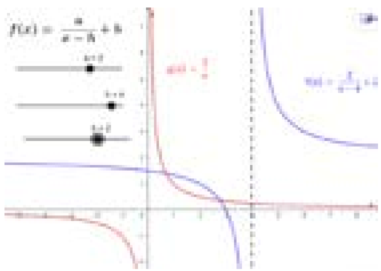
Figura 28.
Transformaciones dinámicas en Geogebra de funciones cuadráticas



Nota: Elaboración propia.

Las *funciones racionales*, como $f(x) = \frac{a}{x-h} + b$, ofrecen una excelente oportunidad para comprender el efecto de los parámetros sobre la posición de las asíntotas y la forma de las ramas. GeoGebra y Desmos permiten mostrar cómo un cambio en "h" traslada la gráfica horizontalmente, moviendo la asíntota vertical, mientras que "b" provoca un desplazamiento vertical de toda la función (Figura 29). Este tipo de exploraciones permite discutir con los estudiantes el concepto de dominio restringido sin necesidad de cálculos avanzados. Según Blitzer (2019), la visualización de este tipo de funciones refuerza la comprensión de los límites de definición y la naturaleza del comportamiento extremo de las funciones algebraicas.

Figura 29.
Transformaciones dinámicas en Geogebra de funciones racionales



Nota: Elaboración propia.

Las funciones radicales, como $f(x) = \sqrt{x-h} + b$, permiten abordar el papel de los parámetros en la forma y el inicio de la gráfica. Los deslizadores en Desmos hacen evidente cómo el parámetro "h" define el punto de partida del dominio y cómo "a" influye en el "ritmo" de crecimiento de la curva. Estas representaciones fomentan una comprensión más cualitativa del comportamiento funcional, invitando a los estudiantes a razonar sobre los efectos de cada parámetro antes de recurrir a cualquier cálculo formal.

Potencial didáctico y cognitivo de la exploración visual

Tanto GeoGebra como Desmos promueven un aprendizaje visual e inductivo, donde el estudiante pasa de la observación particular a la generalización. En lugar de memorizar fórmulas de transformación, el alumno construye significados a partir de lo que ve y manipula. Esta interacción entre símbolo y representación concreta fortalece lo que Tall (2013) denomina pensamiento proceptual: la capacidad de concebir una función como un proceso (una acción que transforma) y como un objeto (una forma que se puede analizar y comparar).

Desde el punto de vista pedagógico, el uso de estos entornos tecnológicos favorece la diversidad de estilos de aprendizaje. Los estudiantes pueden explorar a su propio ritmo, verificar conjeturas, corregir errores y compartir observaciones con sus compañeros. Como señalan Hohenwarter, Lavicza y Scher (2007), GeoGebra no es solo una herramienta de representación, sino un entorno de experimentación que convierte la abstracción matemática en una experiencia cognitiva tangible.

De la observación al razonamiento funcional

El análisis de las transformaciones mediante GeoGebra y Desmos permite a los estudiantes razonar visualmente sobre el comportamiento de las funciones sin recurrir a derivadas ni a procedimientos algebraicos complejos. Al manipular parámetros, se evidencia la idea fundamental de que cada número cumple un papel estructural dentro de la función: controlar su dirección, desplazamiento o forma. Esta comprensión visual prepara el terreno para la generalización de patrones en funciones más complejas, como las exponenciales o logarítmicas, donde el significado de los parámetros se conserva, aunque cambie la expresión algebraica.

Ejercicios exploratorios y abiertos para el análisis gráfico

El aprendizaje profundo de las funciones algebraicas se construye cuando los estudiantes dejan de resolver mecánicamente ecuaciones y comienzan a explorar gráficas, conjeturar regularidades y justificar transformaciones. En este proceso, los ejercicios exploratorios y abiertos se convierten en una estrategia clave para vincular lo simbólico y lo visual, promoviendo un pensamiento algebraico flexible. Como señala Godino (2003), la comprensión funcional emerge cuando los estudiantes logran interpretar los objetos matemáticos desde distintas representaciones y contextos.

El sentido de los ejercicios exploratorios y abiertos

Un ejercicio exploratorio invita al estudiante a descubrir cómo se comporta una función ante variaciones en sus parámetros o condiciones iniciales. Los **ejercicios abiertos**, por su parte, no exigen una única respuesta, sino que promueven el razonamiento, la comparación y la argumentación. Según Pólya (2014), aprender matemáticas implica experimentar la incertidumbre del problema, buscar regularidades y generalizar conclusiones: una práctica científica en miniatura.

La **enseñanza moderna del álgebra** especialmente en su vínculo con la geometría y la visualización, se fortalece cuando el estudiante es protagonista del descubrimiento. En palabras de Duval (2006), la comprensión matemática se logra al coordinar los diferentes registros de representación: el simbólico, el gráfico y el numérico.

Ejercicios exploratorios con funciones lineales y afines

Comenzar con funciones lineales favorece la comprensión intuitiva del cambio constante y la pendiente. Actividades como las siguientes permiten un trabajo significativo:

- **Ejemplo 1:** Explora en GeoGebra las gráficas de $\mathrm{f(x) = mx + b}$ cuando "m" toma los valores 1, 2, -1 y -3. Describe cómo cambia la inclinación de la recta. Este ejercicio estimula la observación de patrones, el uso del lenguaje natural y la articulación entre la noción de pendiente y dirección.
- **Ejemplo 2:** Crea dos rectas con pendientes distintas que se crucen en el punto (2,3). Explica qué condiciones deben cumplir sus ecuaciones. Aquí se integran los conceptos de intersección, sistema lineal y análisis gráfico, generando reflexión sobre las relaciones entre ecuaciones y puntos comunes.

Según Kieran (2018), este tipo de exploraciones desarrollan una comprensión estructural del álgebra, entendida como la habilidad para reconocer relaciones invariantes a través de distintas representaciones.

Ejercicios abiertos con funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas son ideales para la experimentación con parámetros y simetrías. En lugar de pedir al estudiante que "dibuje una parábola", se lo desafía a explorar sus transformaciones:

- **Ejemplo 3:** Investiga cómo cambia la gráfica de

$$\mathrm{f\left(x\right) = a(x - h)^2 + b}$$

Elabora una tabla donde describas los efectos de cada parámetro. Este ejercicio fomenta la observación sistemática y la formulación de conclusiones generales sobre apertura, orientación y posición.

- **Ejemplo 4:** Diseña una parábola que tenga vértice en (–1, 3) y que pase por el punto (1, 7). Determina su ecuación y explica cómo la encontraste. Este tipo de pregunta estimula el pensamiento inverso y la modelación: el estudiante parte de la representación gráfica o de condiciones geométricas para reconstruir la expresión algebraica.
- **Ejemplo 5:** Compara las funciones

$$f\left(\mathbf{x}\right) = x^2, g\left(\mathbf{x}\right) = (x-2)^2 + 1 \text{ y } h\left(\mathbf{x}\right) = -2(x-h)^2 + 3.$$

Indica en qué se parecen y en qué difieren sus gráficas. Al comparar simultáneamente tres funciones, el estudiante identifica patrones, reflexiona sobre traslaciones y reflexiones, y desarrolla pensamiento analógico.

De acuerdo con Radford (2014), este tipo de experiencias concretan el pensamiento semiótico, donde el alumno da sentido a los símbolos matemáticos a través de la observación, la palabra y la acción.

Ejercicios con funciones cúbicas, racionales y radicales

Para avanzar hacia una comprensión más amplia del comportamiento gráfico, los ejercicios exploratorios deben incluir diversidad funcional, no solo aquellas de segundo grado:

- **Ejemplo 6:** Analiza las gráficas de

$$f\left(\mathbf{x}\right) = x^3, g\left(\mathbf{x}\right) = (x-2)^3 \text{ y } h\left(\mathbf{x}\right) = -(x-4)^2 + 1.$$

¿Qué cambios observas al modificar los parámetros? Este ejercicio permite descubrir la idea de simetría rotacional y la influencia del signo del coeficiente en la orientación.

- **Ejemplo 7:** Explora en Desmos la función $\left(\mathbf{x}\right) = \frac{a}{x-h} + b$. Describe cómo cambian las asíntotas cuando alteras los valores de “h” y “b”. A través de la observación, el estudiante comprende que las transformaciones no solo afectan la forma, sino también las restricciones del dominio.

- **Ejemplo 8:** Dibuja

$$f\left(x\right) = \sqrt{x-h} + k$$

para distintos valores de “k” y “k”. Explica cómo el punto inicial de la curva se desplaza. Este tipo de ejercicios es útil para trabajar la noción de dominio y rango de manera visual, sin necesidad de fórmulas ni derivadas.

Como afirma Blitzer (2019), la experimentación con familias de funciones genera conexiones entre las representaciones algebraicas y geométricas, permitiendo al estudiante desarrollar una intuición sobre el comportamiento global de las funciones.

Ejercicios de síntesis y comparación entre funciones

Los ejercicios de análisis comparativo favorecen la generalización y la transferencia de conocimientos. Por ejemplo:

- **Ejemplo 9:** Coloca en una misma vista las funciones $\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{x}^2$, $\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{x}^3$ y $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{x}}$. ¿Qué diferencias encuentras en la forma y crecimiento de cada una? Este ejercicio estimula el pensamiento variacional y la capacidad de comparar tasas de cambio visualmente.
- **Ejemplo 10:** Propón una función algebraica que combine características de las funciones anteriores. Explica qué parte de su ecuación influye más en su forma. El estudiante asume un rol de diseñador de funciones, consolidando su comprensión de los parámetros como elementos estructurales.

Dimensión didáctica y cognitiva

El enfoque exploratorio se sustenta en la idea de que el conocimiento se construye activamente mediante la interacción con representaciones visuales. Como sostiene Artigue (2018), el aprendizaje se potencia cuando las tareas invitan al estudiante a manipular, observar, registrar y comunicar lo que descubre. En este proceso, herramientas como GeoGebra y Desmos no son simples recursos gráficos, sino laboratorios conceptuales donde la matemática se experimenta.

Además, los ejercicios abiertos promueven un aula inclusiva: cada estudiante puede llegar a conclusiones válidas desde distintos niveles de razonamiento, generando diversidad de respuestas y fomentando el diálogo matemático. De acuerdo con el diseño Universal para el aprendizaje (CAST, 2018), las actividades deben ofrecer múltiples formas de participación y expresión, adaptándose a las diferencias cognitivas y comunicativas de los aprendices.

Conclusiones

El estudio de las funciones algebraicas permitió comprender cómo las variaciones en los parámetros modifican la forma, posición y orientación de sus gráficas, revelando la estrecha relación entre el lenguaje algebraico y la representación visual. A lo largo del capítulo se evidenció que analizar las funciones desde una perspectiva gráfica no solo enriquece la comprensión conceptual, sino que también despierta el interés por descubrir patrones, formular conjeturas y justificar razonamientos. La observación, la exploración y la comparación se consolidan, así como estrategias clave para que el estudiante construya significado y desarrolle una mirada más profunda y flexible sobre el comportamiento de las funciones.

En el ámbito educativo, las actividades abiertas y exploratorias presentadas favorecen el aprendizaje activo y la autonomía intelectual. Cuando el estudiante manipula, experimenta y reflexiona sobre las transformaciones gráficas, la matemática deja de ser un conjunto de reglas para convertirse en una herramienta de interpretación y razonamiento. Este enfoque promueve la curiosidad, el pensamiento crítico y la conexión entre lo simbólico y lo visual, aspectos esenciales para avanzar hacia el estudio de las funciones trascendentes y el desarrollo de competencias analíticas que perduren más allá del aula.

Referencias

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2020). Cálculo. Un enfoque intuitivo y físico (12º ed.). México: Limusa Wiley.

Apostol, T. M. (2013). Análisis matemático (2.º ed.). Addison-Wesley.

Artigue, M. (2018). Digital tools and mathematics teaching and learning: Conceptual frameworks and developments. Springer.

Blitzer, R. (2018). Álgebra y trigonometría (6.º ed.). Pearson

Blitzer, R. (2019). Precalculus: Mathematics for calculus (8th ed.). Pearson Education.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). A history of mathematics (3rd ed.). Wiley.

Burton, D. M. (2011). Teoría elemental de números (7.º ed.). McGraw-Hill.

CAST. (2018). Universal Design for Learning guidelines version 2.2. CAST. http://udlguidelines.cast.org

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. The Journal of Mathematical Behavior, 11(2), 213–232.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1), 143–168.

Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas en la educación matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Didáctica de las matemáticas para maestros. Granada: Universidad de Granada.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27(3), 126–131.

Katz, V. J. (2009). A history of mathematics: An introduction (3rd ed.). Addison-Wesley.

Kieran, C. (2018). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Springer.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). Calculus of a single variable (12th ed.). Cengage Learning.

Pólya, G. (2014). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Radford, L. (2014). The embodied mind and mathematical thinking: Learning and teaching from a semiotic perspective. Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Stewart, J. (2016). Cálculo de una variable: trascendentes tempranas (8.a ed.). México: Cengage Learning.

Stewart, J. (2021). Calculus: Concepts and contexts (6th ed.). Cengage Learning.

Sullivan, M. (2016). Algebra and trigonometry (10th ed.). Pearson.

Tall, D. (2013). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Capítulo IV

Funciones trascendentes y sus propiedades

Introducción

El estudio de las funciones trascendentes marca uno de los momentos más significativos del aprendizaje matemático, porque en ellas el pensamiento se abre a la comprensión del cambio en su forma más profunda. Las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas permiten describir procesos que van más allá de lo que las funciones algebraicas pueden expresar. A través de ellas es posible entender el crecimiento de una población, el comportamiento de una onda o la manera en que la luz se atenúa con la distancia. Este capítulo busca que el estudiante descubra en las funciones trascendentes no solo un conjunto de fórmulas, sino un modo de pensar los fenómenos naturales y sociales con precisión, belleza y sentido.

Cada una de estas funciones encierra una historia y una interpretación distinta del mundo. La función exponencial muestra cómo algo puede crecer o decrecer sin límite, reflejando el ritmo de la vida y el paso del tiempo. El logaritmo, su inversa, revela la forma en que la mente humana percibe la magnitud de los cambios: no de manera lineal, sino proporcional. Las funciones trigonométricas, por su parte, condensan la esencia de la periodicidad: el movimiento de los planetas, la vibración del sonido, las oscilaciones del corazón. En conjunto, las funciones trascendentes componen una sinfonía matemática donde cada una aporta su propio tono para explicar la armonía de lo real.

Más allá del cálculo y las propiedades, este capítulo invita a contemplar las funciones trascendentes como un encuentro entre la abstracción y la experiencia. En ellas, la matemática se vuelve lenguaje del movimiento, instrumento para comprender la regularidad y el misterio que habitan en lo cotidiano. A través de ejemplos, representaciones gráficas y aplicaciones, el lector podrá ver cómo estos conceptos conectan la razón con la intuición, lo simbólico con lo visual y lo teórico con lo vivencial. Aprender funciones trascendentes es, finalmente, aprender a mirar el mundo desde una perspectiva más amplia, donde la lógica y la belleza se unen para revelar las leyes que sostienen el cambio y la continuidad en la naturaleza.

Funciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones exponenciales y logarítmicas constituyen un pilar esencial del pensamiento trascendente, pues describen fenómenos donde el cambio no es uniforme, sino proporcional al estado mismo de la magnitud. Su comprensión implica una transición cognitiva desde la proporcionalidad lineal hacia una concepción multiplicativa del cambio, que se manifiesta en procesos de crecimiento, decrecimiento y escala. A lo largo de la historia de la matemática, estas funciones han permitido explicar con precisión el comportamiento de sistemas naturales y sociales, desde el crecimiento poblacional hasta la propagación de ondas o la evolución del capital financiero. En este sentido, su estudio no solo tiene valor teórico, sino también epistémico, al permitir que el estudiante reconozca la estructura matemática que subyace en la realidad (Stewart, 2016; Sullivan, 2016; Larson, 2021).

Definición, propiedades y relación de inversa

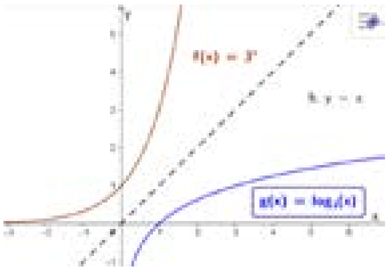
La función exponencial, expresada como $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$, se caracteriza por un crecimiento o decrecimiento que depende del valor actual de la variable, lo que le otorga un comportamiento autorreferencial. Tal como explica Stewart (2016), la idea de "crecimiento proporcional al estado" permite modelar desde la reproducción de una especie hasta la acumulación de intereses en una cuenta bancaria.

La función logarítmica, definida como $g(x) = \log_a(x)$, surge como la inversa conceptual de la exponencial y responde a una necesidad histórica: medir el tiempo o la magnitud necesaria para alcanzar un determinado resultado de crecimiento. Napier, al crear los logaritmos en el siglo XVII, buscaba precisamente simplificar los cálculos multiplicativos transformándolos en sumas, lo que cambió para siempre la forma de trabajar con grandes números (Eves, 2010).

La relación de inversión entre ambas funciones se refleja no solo algebraicamente, sino también en el plano gráfico. La simetría respecto a la recta y = x revela la conexión bidireccional entre los procesos de crecimiento exponencial y los de escala logarítmica. Sullivan (2016) subraya que enseñar esta dualidad fomenta la comprensión relacional del concepto de función, más allá de la manipulación de fórmulas, y prepara el terreno para los temas de cálculo diferencial e integral.

Por ejemplo: La función $\mathrm{f(x)} = 3^{\mathrm{x}}$ tiene como inversa $\mathrm{g(x)} = \log_3(\mathrm{x})$ (Figura 1). Mientras f(x) crece sin límite a medida que "x" aumenta, $\mathrm{g(x)}$ se incrementa lentamente, mostrando la naturaleza opuesta de los procesos que representan: expansión acelerada versus crecimiento desacelerado.

Figura 1.
Representación de la función exponencial y su inversa

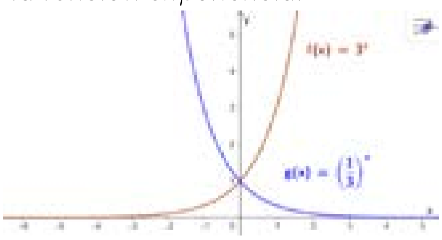


Nota: Elaboración propia.

Entre las propiedades fundamentales de la función exponencial (Figura 2) se destacan las siguientes:

1. **Dominio y recorrido:** Su dominio es todo número real, mientras que su recorrido está restringido a valores positivos, f(x) > 0. Esto refleja su naturaleza estrictamente positiva, lo que la hace útil para representar magnitudes físicas y económicas que no pueden adoptar valores negativos.

Figura 2.
Representación de la función exponencial



Nota: Elaboración propia.

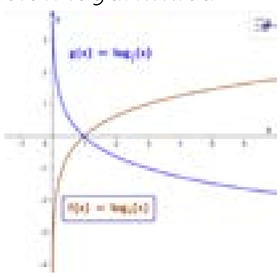
2. **Crecimiento o decrecimiento monótono:** Si $a > 1$, la función crece de forma indefinida; si $0 > a < 1$, decrece tendiendo a cero. Esta dualidad ilustra la versatilidad del modelo para representar tanto procesos expansivos como disipativos.
3. **Punto de intersección:** Todas las exponenciales pasan por el punto (0,1), dado que a^0. Este punto sirve como referencia para la construcción de la gráfica.
4. **Multiplicación de potencias:** Cumple la ley $a^{x+y} = a^x a^y$, que expresa la coherencia de la función bajo la composición de exponentes.
5. **División de potencias:** La expresión $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ permite simplificar operaciones cuando se comparan valores de la misma base.
6. **Potencia de una potencia:** La propiedad $(a^x)^r = a^{xr}$ garantiza la estabilidad del sistema exponencial ante transformaciones sucesivas.

Estas relaciones dotan a la función exponencial de una estructura algebraica sólida, que respeta las reglas de proporcionalidad multiplicativa y asegura su coherencia interna en cualquier contexto de aplicación (Sullivan, 2016).

Propiedades fundamentales de la función logarítmica

Las propiedades de la función logarítmica derivan directamente de su condición de inversa de la exponencial. Larson (2021) señala que esta correspondencia inversa no solo es formal, sino que también posee un significado cognitivo profundo: permite al estudiante comprender que el logaritmo no mide una cantidad, sino la potencia necesaria para generar una cantidad.

Figura 3.
Representación de la función logaritmica



Nota: Elaboración propia.

1. **Dominio y recorrido:** La función está definida solo para $x > 0$, y su recorrido abarca todos los números reales. Esta restricción refleja que no existen logaritmos de números negativos ni de cero.

2. **Punto característico:** Todo logaritmo de la base es igual a 1, es decir, $\log_a(a) = 1$, y el logaritmo de 1 siempre es cero, $\log_1(a) = 0$.
3. **Suma de logaritmos:**

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x\right) - \log_a\left(y\right)$$

que corresponde a la multiplicación de potencias en la función inversa.

4. **Resta de logaritmos:** $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$, que expresa la relación inversa con la división de potencias.
5. **Potencia dentro del argumento:** $\log_a(xy)$, lo que permite linealizar expresiones exponenciales.
6. **Cambio de base:**

$$\log_a\left(x\right) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

una propiedad que posibilita el uso de cualquier base conveniente para el cálculo.

Estas propiedades reflejan una estructura simétrica respecto a la exponencial: toda operación de multiplicación o división en el dominio se convierte en una suma o resta en el logaritmo. Este principio constituye la base de su aplicación en las escalas logarítmicas, en la acústica, la química o la ingeniería de datos (Artigue, 2018).

Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

El estudio de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas constituye un paso esencial en la transición desde el álgebra elemental hacia el pensamiento trascendente. En este ámbito, el estudiante no solo aplica procedimientos operativos, sino que desarrolla la capacidad de interpretar y transformar expresiones que modelan procesos de crecimiento, transformación o escala. Resolver este tipo de ecuaciones implica comprender la relación de inversa entre las funciones $f(x) = a^x$ y $f(x) = \log_a(x)$, lo que permite pasar de una forma exponencial a su equivalente logarítmica y viceversa (Stewart, 2016; Sullivan, 2016).

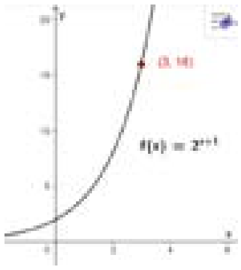
Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella en la que la incógnita aparece en el exponente, como en $a^{f(x)} = b$. Su resolución se basa en dos principios:

1. Igualación de bases, cuando los términos pueden expresarse con la misma base.
2. Aplicación del logaritmo, cuando la igualación directa no es posible.

Ejemplo 1. Resolver $2^{x+1} = 16$. Como $2^4 = 16$, se obtiene $2^{x+1} = 2^4$, se puede constatar que los exponentes son iguales: por lo tanto: $x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$. Geométricamente se puede constatar (Figura 4).

Figura 4.
Representación de la solución de la ecuación exponencial



Nota: Elaboración propia.

Este tipo de ejercicio fomenta la comprensión estructural de la potencia y el reconocimiento de patrones numéricos en los exponentes, habilidades fundamentales en el desarrollo del pensamiento algebraico (Godino & Batanero, 1998).

Ejemplo 2. Aplicación del logaritmo
Resolver $3^{2x-1} = 20$. Al no ser posible expresar 20 como potencia de 3, se aplica logaritmo en ambos lados. Puede ser base 10 o natural; da igual (cambio de base).

$$\log\left(3^{2x-1}\right) = \log\left(20\right)$$

aplicando propiedades

$$(2x - 1)\log(3) = \log(20)$$

despejar el término lineal

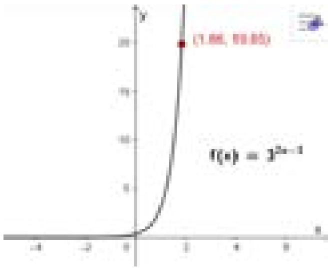
$$2x - 1 = \frac{\log(20)}{\log(3)}$$

de donde

$$x = \frac{\log(20)+\log(3)}{2\log(3)} = \frac{\log(60)}{2\log(3)} = \frac{1}{2}\log_{60}\left(60\right)$$

$x \approx 1.8634165139$. Geométricamente se puede comprobar dicha solución (Figura 5). Esta técnica, según Stewart (2016), permite "liberar" el exponente y transformarlo en una expresión lineal, consolidando el vínculo conceptual entre las potencias y los logaritmos.

Figura 5.
Representación de la solución de la ecuación exponencial



Nota: Elaboración propia.

Ecuaciones logarítmicas
Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita aparece dentro de un logaritmo, como en $\log_a(f(x)) = b$. Resolverla requiere el uso de la definición inversa del logaritmo:
$\log_a\left(f\left(x\right)\right) = b \Leftrightarrow f\left(x\right) = a^b$

Esta propiedad constituye la base para transformar ecuaciones logarítmicas en ecuaciones exponenciales equivalentes.

Ejemplo 3. Transformación inversa:

Resolver: $\log_2(x-1) = 3$. Por definición, $x - 1 = 2^3 = 8$, de donde x=9.

Ejemplo 4. Ecuación con suma de logaritmos.
Resolver: $\log_3(x-1) + \log_3(x+2) = 2$

Por **definición inversa:** $\left(x-1\right)\left(x+2\right) = 3^2$
desarrollando obtenemos

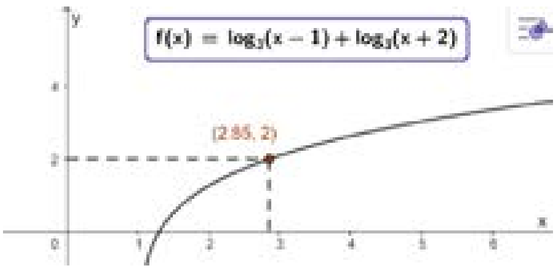
$$\left(x^2 + x - 11 = 0\right)$$

resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{45}}{2}$$

Como el dominio del logaritmo exige $x > 1$, se conserva solo $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 2.85$, la figura muestra el resultado obtenido.

Figura 6.
Representación de la solución de la ecuación exponencial



Nota: Elaboración propia.

Este ejemplo evidencia la necesidad de considerar las restricciones de dominio propias de la función logarítmica, aspecto que refuerza la rigurosidad conceptual y el pensamiento lógico (Larson, 2021).

Apoyo didáctico: Las ecuaciones exponenciales y logarítmicas no deben enseñarse como un conjunto de reglas aisladas, sino como expresiones interdependientes que representan distintos puntos de vista de un mismo fenómeno. Artigue (2018) y Tall (2013) coinciden en que el aprendizaje significativo de estas ecuaciones se potencia cuando los estudiantes visualizan sus soluciones en el plano cartesiano, observando cómo las curvas $y = a^x yy = \log_a(x)$ interceptan con rectas horizontales o diagonales para representar los valores buscados.

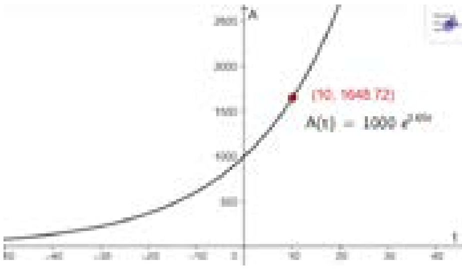
Apoyo didáctico: Desde una perspectiva pedagógica, Godino y Batanero (1998) sostienen que enseñar estas ecuaciones mediante la resignificación del error favorece la comprensión: el estudiante aprende más al analizar por qué una solución no pertenece al dominio que al limitarse a la aplicación mecánica de propiedades. En este sentido, las herramientas tecnológicas como GeoGebra y Desmos se convierten en mediadores poderosos para la exploración de soluciones, promoviendo la articulación entre lo simbólico, lo numérico y lo gráfico (Artigue, 2018).

Modelos de crecimiento, decrecimiento y escala logarítmica
La observación del crecimiento y decrecimiento en la naturaleza, la economía o la tecnología revela una constante: todo cambia de manera proporcional a su propio estado. Esa es la esencia de los modelos exponenciales y logarítmicos. Su comprensión no se limita a resolver ecuaciones, sino a entender los ritmos del mundo: cómo algo se multiplica, cómo se atenúa, o cómo una pequeña variación inicial puede transformarse en un cambio gigantesco.

Crecimiento exponencial: cuando lo pequeño se multiplica
Imaginemos una población de bacterias en condiciones óptimas: cada individuo se divide en dos cada hora. Si comenzamos con una sola célula, al cabo de cinco horas habrá $2^5 = 32$ células; después de diez horas, $2^{10} = 1024$. Este crecimiento, descrito por la función $y(t) = y_0 e^{kt}$, muestra cómo el cambio depende del valor actual del fenómeno, no de una cantidad fija (Boyce & DiPrima, 2017).

Stewart (2016) explica que este modelo se aplica también en finanzas, donde el interés compuesto genera un incremento continuo del capital. Por ejemplo, una inversión de 1000 dólares al 5% anual crece según $A(t) = 1000e^{0.05t}$ (Figura 7), lo que significa que después de 10 años el capital asciende a 1648,72 dólares. La “magia” del crecimiento exponencial radica en la retroalimentación acumulativa: cuanto más se tiene, más se gana.

Figura 7.
Representación del crecimiento exponencial aplicado a las finanzas



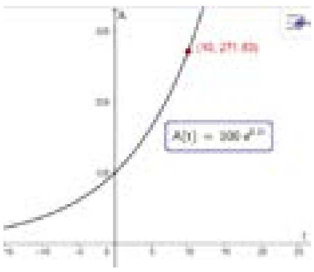
Nota: Elaboración propia.

En el ámbito educativo, el modelo de crecimiento exponencial permite comprender cómo el aprendizaje y la motivación se retroalimentan de manera acumulativa cuando existen condiciones adecuadas de enseñanza, acompañamiento y práctica sostenida. Tal como plantea Stewart (2016), el crecimiento continuo en sistemas dinámicos se basa en pequeños incrementos que se acumulan y se potencian con el tiempo. De forma análoga, el aprendizaje humano no avanza de manera lineal: cada nueva comprensión amplía la base sobre la cual se construyen conocimientos posteriores.

Por ejemplo, El *progreso del conocimiento* puede modelarse mediante la función: $\mathrm{A}(\mathrm{t}) = 0.20\mathrm{e}^{0.15\mathrm{t}}$, donde $\mathrm{A}(\mathrm{t})$ representa el porcentaje de dominio después de "t" semanas. Luego de 8 semanas, el nivel de comprensión se aproxima al 66 %, mostrando cómo la retroalimentación acumulativa genera un aprendizaje cada vez más rápido a medida que el estudiante consolida saberes previos y los conecta con nuevos contenidos.

El aprendizaje de una lengua extranjera, un estudiante que comienza con un vocabulario básico de 100 palabras y estudia con una tasa de incremento del 10 % semanal, puede modelar su progreso mediante la función $\mathrm{A}(\mathrm{t}) = 100\mathrm{e}^{0.10\mathrm{t}}$ (Figura 8). Después de 10 semanas, el estudiante dominaría aproximadamente 271 palabras.

Figura 8.
Representación del crecimiento exponencial aplicado al ámbito educativo



Nota: Elaboración propia.

Este crecimiento no solo refleja la memorización, sino la conexión semántica entre los términos aprendidos, que acelera la adquisición de nuevos significados. Según Krashen(1982), la exposición comprensible y constante genera una adquisición lingüística natural que crece en espiral, reforzándose con cada experiencia comunicativa.

Del mismo modo, en matemáticas, el modelo puede describir cómo la práctica diaria y el refuerzo conceptual incrementan la comprensión de manera acumulativa. Un alumno que comprende el 40 % de los conceptos al inicio de un módulo y mejora un 12 % por semana, puede alcanzar cerca del 100 % de dominio en apenas dos meses. Este proceso refleja lo que Bruner (1997) denominó currículo en espiral, donde el conocimiento se revisita en niveles cada vez más complejos, permitiendo una profundización progresiva.

Apoyo didáctico: En educación superior, el modelo exponencial también ayuda a explicar cómo se desarrolla la competencia investigativa en los estudiantes. Durante los primeros semestres, el progreso suele ser lento; sin embargo, cuando el estudiante domina la lectura académica y la formulación de problemas, la productividad investigativa aumenta aceleradamente. Como señala Biggs (2005), el aprendizaje profundo emerge cuando el estudiante comprende la estructura subyacente de las tareas y comienza a transferir su conocimiento a nuevas situaciones.

En contextos de formación docente, el modelo también puede aplicarse al desarrollo profesional continuo. Un maestro que participa regularmente en comunidades de aprendizaje, lecturas colaborativas y talleres, mejora su desempeño pedagógico a una tasa que puede estimarse mediante el mismo principio de crecimiento acumulativo. La retroalimentación reflexiva y el intercambio entre pares generan un efecto multiplicador del saber docente. Schön (1983) lo llamó reflexión en la acción, un proceso mediante el cual la experiencia se convierte en conocimiento práctico y el crecimiento profesional se acelera.

Otro ámbito ilustrativo es el *aprendizaje mediado por tecnología*. Cuando los estudiantes utilizan plataformas adaptativas, como Moodle o GeoGebra, el sistema ajusta los niveles de dificultad según sus respuestas, potenciando la práctica deliberada. Ericsson (2006) mostró que la repetición guiada con retroalimentación inmediata produce un crecimiento exponencial en la adquisición de habilidades complejas, al reforzar las conexiones neuronales asociadas con el dominio experto.

En conjunto, estos ejemplos revelan que el crecimiento exponencial en educación no depende únicamente del tiempo o la cantidad de práctica, sino de la calidad de la interacción pedagógica y de la estructura cognitiva acumulativa que se construye. Tal como señala Vygotsky (1979), el aprendizaje socialmente mediado amplía la zona de desarrollo próximo del estudiante, generando un avance que se acelera conforme aumenta su autonomía y capacidad autorreguladora.

Así, el modelo exponencial, más allá de su origen en las finanzas o la biología, ofrece una metáfora poderosa para comprender los procesos de aprendizaje humano: cuanto más aprende el estudiante, más capaz se vuelve de aprender, y cuanto mayor es su comprensión, más profunda se hace su motivación por seguir aprendiendo.

Decrecimiento exponencial: cuando el tiempo erosiona lo existente

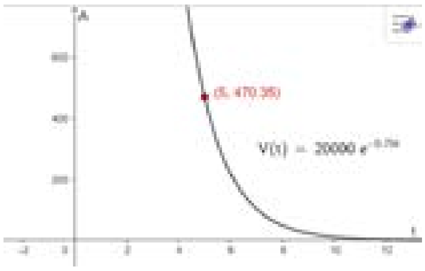
Así como algunos procesos crecen aceleradamente, otros se desgastan de forma continua y proporcional. La temperatura de un objeto caliente que se enfría en una habitación, la cantidad de medicamento en el cuerpo o la intensidad de una sustancia radiactiva siguen el mismo principio matemático: cada instante se pierde una fracción del valor restante. Este comportamiento puede expresarse mediante $y = y_0 e^{-kt}$, donde "k" indica la rapidez del descenso (Murray, 2002).

Pensemos en un café caliente sobre la mesa: su temperatura desciende con rapidez al principio y más lentamente después. Newton formuló este comportamiento con la ecuación $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$, donde T_a es la temperatura ambiente y T_0 la temperatura del café justo cuando se coloca sobre la mesa.

Un ejemplo cotidiano es la depreciación de un automóvil. Si su valor disminuye cada año en un 15%, la función exponencial negativa muestra cómo el precio se reduce con mayor rapidez al principio y más lentamente con el tiempo, de esta manera la función $V(t) = V_0 e^{-0.15t}$, representa cómo el precio $V(t)$ se reduce de manera más rápida al principio y luego más lentamente con el tiempo. Este tipo de modelo se extiende a fenómenos sociales, como la disminución del interés por una tendencia o el olvido progresivo de una información aprendida.

Por ejemplo, si un vehículo nuevo cuesta 20 000 dólares, después de cinco años su valor aproximado sería $20000e^{-0.75t} \approx 9400$ dólares (Figura 9). Este fenómeno ilustra cómo la pérdida es significativa en los primeros años, estabilizándose gradualmente.

Figura 9.
Representación del proceso de depreciación de un vehículo

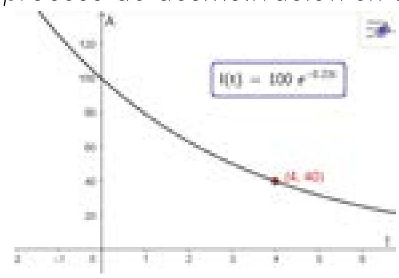


Nota: Elaboración propia.

En términos educativos, este comportamiento puede compararse con la disminución de la motivación inicial en un curso si no se mantiene el estímulo o el refuerzo, como señalan Deci y Ryan (2000) en su teoría de la autodeterminación. El mismo principio explica la disminución del interés en una tendencia o práctica educativa. Supongamos que un grupo de estudiantes utiliza una aplicación de gamificación que al inicio despierta gran entusiasmo. En las primeras semanas, el uso es intenso; sin embargo, después de dos meses la participación disminuye drásticamente. El comportamiento puede modelarse mediante $\mathbf{I(t) = I_0 e^{-kt}}$, donde $\mathbf{I_0}$ es el interés inicial y "k" la tasa de pérdida de motivación. Este fenómeno se observa en la difusión de innovaciones: según Rogers (2003), toda novedad educativa sigue una curva de adopción donde el entusiasmo inicial declina si no se introducen elementos de renovación o sentido pedagógico.

Un ejemplo concreto se encuentra en las aulas virtuales: un curso en Moodle puede comenzar con 100 % de participación, pero, sin retroalimentación ni interacción, el interés de los estudiantes puede descender al 40 % en pocas semanas (Figura 10). La falta de estímulo, de sentido o de reconocimiento provoca un decrecimiento motivacional que responde a una función exponencial negativa.

Figura 10.
Representación del proceso de desmotivación en un curso



Nota: Elaboración propia.

Como sostienen Deci y Ryan (2000), la motivación autónoma requiere satisfacción de tres necesidades básicas: competencia, autonomía y relación; cuando estas no se atienden, el interés se erosiona con rapidez. El decrecimiento exponencial también se manifiesta en la curva del olvido, formulada por Hermann Ebbinghaus (1885). Este investigador demostró experimentalmente que la memoria se deteriora con gran rapidez después del aprendizaje y luego lo hace de manera más lenta, ajustándose al modelo: $\mathrm{M(t) = M_0 e^{-kt}}$ donde $\mathrm{M_0}$ es el conocimiento inicial y $\mathrm{M(t)}$ lo que se recuerda al cabo del tiempo "t".

Por ejemplo, un estudiante que domina el 100 % de una lección puede retener solo un 60 % al cabo de un día y un 30 % tras una semana si no repasa el contenido. Sin embargo, la aplicación de estrategias como la repetición espaciada, el aprendizaje significativo (Ausubel, 1983) o la evaluación formativa (Black & Wiliam, 2009) puede contrarrestar esta tendencia natural al olvido.

En la práctica, esto implica que un docente que refuerza los aprendizajes de forma periódica, vinculándolos con experiencias previas, ayuda a que la curva de olvido se "aplane", es decir, que el conocimiento se mantenga más tiempo en la memoria de largo plazo.

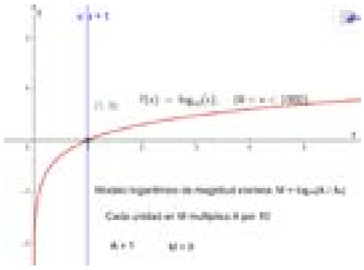
Escalas logarítmicas: una nueva forma de medir el cambio

Las escalas logarítmicas nacen de la necesidad de representar fenómenos que varían en proporciones muy grandes. Tukey (1977) explica que estas escalas revelan patrones ocultos y facilitan la comparación entre fenómenos aparentemente dispares. Ejemplos comunes de escalas logarítmicas son el pH, donde cada unidad representa un cambio de diez veces en la concentración de iones de hidrógeno, o los decibelios, que miden la intensidad del sonido en proporciones multiplicativas (IUPAC, 2014). También la escala de Richter, usada para clasificar terremotos, condensa enormes variaciones de energía en una escala comprensible.

En la escala de Richter, que mide la magnitud de los terremotos, cada punto adicional representa un aumento de diez veces en la amplitud de las ondas sísmicas y una 31,6 veces más energía liberada. Por ejemplo, un terremoto de magnitud 6,0 libera una 31,6 veces más energía que uno de 5,0 y casi 1000 veces más que uno de 4,0. El modelo logarítmico que describe esta relación es: $\mathrm{M = \log_{10}(\frac{A}{A_0})}$, donde A es la amplitud registrada y $\mathrm{A_0}$ la amplitud mínima perceptible por los sismógrafos.

Si el registro muestra una amplitud $\mathrm{A = 10^6 A_0 = 1}$ entonces $\mathrm{M = \log_{10}(10^6)}$ es igual a 6 (Figura 11). Esto significa que un aumento de una sola unidad en la escala equivale a multiplicar la amplitud por 10, no a "sumar uno". En el aula, este ejemplo ayuda a los estudiantes a reinterpretar la magnitud como proporción, no como suma, comprendiendo el poder de los logaritmos para representar fenómenos naturales (Serway & Jewett, 2014).

Figura 11.
Representación del proceso de desmotivación en un curso



Nota: Elaboración propia.

Funciones trigonométricas

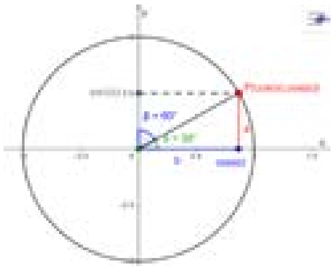
Las funciones trigonométricas constituyen un punto de convergencia entre el álgebra, la geometría y el análisis matemático. Desde una perspectiva formativa, representan una vía privilegiada para comprender la periodicidad y el movimiento en la naturaleza, al mismo tiempo que revelan la elegancia con la que las matemáticas logran describir los fenómenos del mundo real. Su estudio trasciende la simple manipulación de razones entre lados de triángulos: introduce al estudiante en un lenguaje simbólico capaz de expresar vibraciones, oscilaciones y repeticiones que se encuentran tanto en el sonido de una cuerda como en la órbita de los planetas.

Comprender una función como el seno o el coseno no solo implica resolver ecuaciones, sino reconocer patrones de cambio rítmico que articulan la continuidad entre el tiempo, el espacio y la magnitud (Stewart, 2016). En este sentido, las funciones trigonométricas actúan como un puente cognitivo que conecta la experiencia empírica del movimiento con su representación abstracta y algebraica (Thomas et al., 2019).

Definición a partir del círculo unitario.

Históricamente, las funciones trigonométricas surgen del estudio de los triángulos y de la medición de los astros. Sin embargo, su formalización moderna se apoya en el círculo unitario, una construcción geométrica que permite extender el dominio de los ángulos más allá de los 90° y conectar la geometría con el análisis. Si consideramos un punto *P(x,y)* en la circunferencia unitaria, de radio 1 y centrada en el origen (Figura 12), el ángulo αmedido desde el eje positivo de las abscisas genera las proyecciones $x = \cos(\alpha), y = \sin(\alpha)$.

Figura 12.
Representación del proceso de desmotivación en un curso



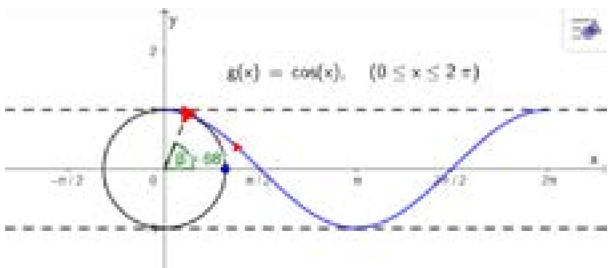
Nota: Elaboración propia.

De esta manera, las funciones seno y coseno se interpretan como coordenadas del punto móvil sobre la circunferencia (Larson & Edwards, 2019). En este triangulo se cumple además $\mathrm{sen}^2(\mathrm{x}) + \cos^2(\mathrm{x}) = 1$, que se deduce directamente del teorema de Pitágoras y es conocida como identidad fundamental trigonométrica.

La imagen presenta una representación geométrica del seno de un ángulo a partir del círculo unitario, una construcción fundamental en la comprensión de las funciones trigonométricas. En el gráfico, se observa un círculo centrado en el origen O, sobre el cual se proyecta un radio que forma un ángulo de $\beta = 68^\circ$ (Figura 13). El punto terminal de este radio, marcado en rojo, determina la altura o valor del seno del ángulo considerado.

Esta proyección vertical desde el punto sobre la circunferencia hasta el eje **"y"** permite visualizar que el valor de $\mathrm{sen}(\theta)$ corresponde a la coordenada **"y"** del punto en el círculo unitario, mientras que el coseno está asociado a la coordenada **"x"**. La *función seno de un ángulo* β se define como la ordenada del punto *P(x, y)* en el círculo unitario asociado al ángulo central correspondiente: $\mathrm{sen}(\beta) = \mathrm{y}$.

Figura 13.
Representación de la función $sen(x)$ y su relación con el círculo trigonométrico



Nota: Elaboración propia.

El coseno del ángulo (β) se define como la abscisa del punto *P(x, y)* sobre el círculo unitario: $\cos(\beta) = x$.

El círculo unitario no solo unifica las nociones de ángulo y longitud de arco, sino que también permite definir las restantes funciones trigonométricas:

$$\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}, \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}, \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}, \csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

Esta conexión entre lo geométrico y lo analítico permite comprender que las funciones trigonométricas son manifestaciones diferentes de una misma estructura funcional compleja, cuya naturaleza es periódica, continua y diferenciable, pero también profundamente simbólica del movimiento y la oscilación.

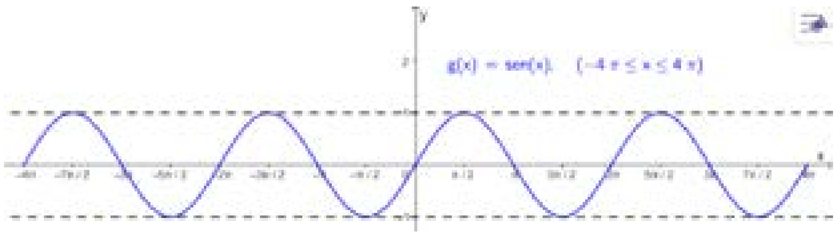
Propiedades, periodicidad y simetrías

Las funciones trigonométricas son periódicas, lo que significa que repiten sus valores en intervalos regulares. El seno y el coseno presentan un período fundamental de 2π, mientras que la tangente y la cotangente tienen un período de π. Se puede comprobar las siguientes igualdades:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \tan(x + \pi) = \tan(x), \cot(x + \pi) = \cot(x)$$

Esta propiedad las convierte en modelos ideales para describir fenómenos cíclicos como las vibraciones, las ondas y los ritmos biológicos (Stewart, 2016).

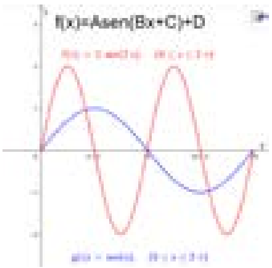
Figura 14.
Representación de la función $sen(x)$ y su relación con el círculo trigonométrico



Nota: Elaboración propia.

Además, las funciones trigonométricas obedecen a identidades fundamentales, entre las cuales destaca además de la identidad pitagórica otras como: $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$, $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$. En la práctica docente, estas propiedades pueden explorarse mediante herramientas digitales como GeoGebra, donde la manipulación de parámetros en funciones del tipo $\mathbf{f(x) = A\,sen(Bx + C) + D}$ (Figura 14) permite visualizar los efectos de la amplitud (A), el período $\left(\frac{2\pi}{\mathbf{B}}\right)$, el desfase **(C)** y la traslación vertical **(D)**.

Figura 15.
Representación general de la función $sen(x)$



Nota: Elaboración propia.

Según Hohenwarter y Jones (2007), el uso de software dinámico fomenta la comprensión conceptual al vincular la expresión simbólica con su representación gráfica y su interpretación física.

Comprensión de signos y valores notables en el círculo unitario
La comprensión de los signos y valores notables en el círculo unitario representa uno de los aprendizajes más significativos dentro del estudio de las funciones trigonométricas. No se trata únicamente de memorizar posiciones o ángulos, sino de interpretar el significado geométrico y funcional de cada punto del círculo, comprendiendo cómo los signos de seno, coseno y tangente expresan la dirección y la orientación del movimiento angular. Este conocimiento conecta la visualización geométrica con la abstracción algebraica, consolidando el pensamiento analítico del estudiante.

En el primer cuadrante, ambas coordenadas son positivas: el seno y el coseno crecen simultáneamente desde 0 hasta 1. En el segundo cuadrante, el seno se mantiene positivo mientras el coseno cambia de signo, lo que produce la inversión en la dirección horizontal del punto. Estas variaciones reflejan, sin cálculo alguno, los cambios de crecimiento y decrecimiento de las funciones cuando se trasladan al plano cartesiano. Como explica Zill (2018), los signos son el "lenguaje visual" de la función: cada cuadrante indica no solo el valor numérico sino el sentido del movimiento.

Cuando el ángulo crece en sentido antihorario, la proyección horizontal (X) corresponde al coseno y la vertical (Y) al seno. Así, el círculo unitario transforma el estudio de triángulos estáticos en un análisis de posiciones dinámicas. Según Thomas et al. (2014), esta representación permite visualizar la continuidad y periodicidad de las funciones sin necesidad de derivadas, pues la regularidad geométrica del círculo basta para predecir el comportamiento de los valores.

Cada cuadrante del círculo unitario refleja una combinación de signos que dependen de la posición del punto (x,y).

Tabla 1.
Tabla de signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante

Cuadrante	Intervalo angular	Signo de $\operatorname{sen}(\theta)$	Signo de $\cos(\theta)$	Signo de $\tan(\theta)$
I	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	(+)	(+)	(+)
II	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	(+)	(-)	(-)
III	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	(-)	(-)	(+)
IV	$\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi$	(-)	(+)	(-)

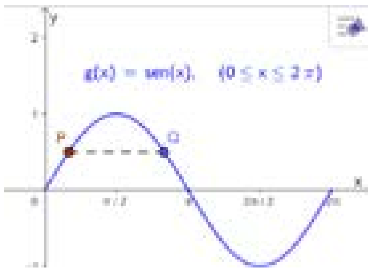
Nota: Elaboración propia.

En el primer cuadrante, ambas coordenadas son positivas: el seno y el coseno crecen simultáneamente desde 0 hasta 1. En el segundo cuadrante, el seno se mantiene positivo mientras el coseno cambia de signo, lo que produce la inversión en la dirección horizontal del punto.

Estas variaciones reflejan, sin cálculo alguno, los cambios de crecimiento y decrecimiento de las funciones cuando se trasladan al plano cartesiano. Como explica Zill (2018), los signos son el "lenguaje visual" de la función: cada cuadrante indica no solo el valor numérico sino el sentido del movimiento.

Los valores notables de seno y coseno correspondientes a ángulos de 0°,30°,45°,60°0°, 30° surgen del análisis de triángulos isósceles y equiláteros inscritos en el círculo. Estos valores se extienden a los demás cuadrantes aplicando las simetrías del círculo. Por ejemplo, si $\operatorname{sen}(30°) = \operatorname{sen}(150°)$ (Figura 15), porque comparten la misma proyección vertical. En cambio, $\operatorname{sen}(150°) = -\cos(30°)$ debido al cambio de signo del eje x.

Figura 16.
Representación gráfica de la función $sen(x)$ y su signo en el primero y segundo cuadrante



Nota: Elaboración propia.

Boyce y DiPrima (2017) subrayan que este razonamiento es fundamental en el aprendizaje conceptual: no se trata de recordar valores, sino de entender su origen geométrico y su coherencia estructural.

Las simetrías del círculo son esenciales para relacionar los valores de diferentes ángulos. Dos ángulos se consideran suplementarios si suman 180° y opuestos si difieren en 180°. Estas relaciones generan equivalencias funcionales:

1. $\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(\theta)$
2. $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta)$
3. $\operatorname{sen}(360^\circ - \theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$
4. $\cos(360^\circ - \theta) = \cos(\theta)$

A través de estas simetrías, los valores del primer cuadrante sirven para reconstruir los de toda la circunferencia. Stewart (2016) destaca que esta generalización refuerza la comprensión estructural del sistema trigonométrico, pues permite trabajar con equivalencias sin necesidad de recurrir a fórmulas derivadas.

Ecuaciones trigonométricas

El estudio de las ecuaciones trigonométricas constituye un paso esencial en la comprensión de las funciones trascendentes, pues permite conectar la estructura algebraica con la periodicidad y las simetrías propias del mundo trigonométrico. Resolver una ecuación trigonométrica implica identificar todos los ángulos que satisfacen una determinada relación funcional, lo que exige reconocer la naturaleza periódica y múltiple de las soluciones. Como señala Stewart (2016), mientras las ecuaciones algebraicas admiten un número finito de soluciones, las trigonométricas se extienden de manera infinita, repitiéndose en intervalos regulares.

Una ecuación trigonométrica es toda igualdad que involucra una o más funciones trigonométricas, tales como el seno, el coseno, la tangente o sus recíprocas. Su objetivo es determinar los valores del ángulo θ\thetaθ que satisfacen la igualdad.

Ejemplo general: $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2}$, Resolver esta ecuación no solo consiste en hallar el ángulo principal que cumple la condición, sino también todos aquellos que producen el mismo valor de seno, teniendo en cuenta la periodicidad de la función.

Según Thomas et al. (2014), comprender una ecuación trigonométrica implica entender que el círculo unitario funciona como un espacio de soluciones repetitivas: cada valor de seno o coseno reaparece en diferentes cuadrantes, lo que da lugar a una familia infinita de soluciones.

La estrategia más formativa para resolver ecuaciones trigonométricas consiste en representarlas en el círculo unitario, pues cada solución corresponde a un punto o conjunto de puntos sobre la circunferencia.

Los puntos cuya altura es $\frac{1}{2}$ corresponden a los ángulos de 30° y 150°. Por la periodicidad de la función seno, las soluciones generales son:

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \, o \, \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Este razonamiento, que surge de la observación geométrica, permite al estudiante visualizar cómo una misma razón trigonométrica se repite en distintos cuadrantes, fortaleciendo la comprensión de la periodicidad (Boyce & DiPrima, 2017).

Las ecuaciones trigonométricas pueden clasificarse en simples, cuadráticas, compuestas y reducibles:

1. **Simples:** implican una sola función, como $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$.
2. **Cuadráticas:** involucran términos como
$$2\text{sen}^2(\theta) - \text{sen}(\theta) - 1 = 0$$
3. **Compuestas:** combinan diferentes funciones, por ejemplo,
$$\text{sen}(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{4}$$
4. **Reducibles:** requieren el uso de identidades trigonométricas para simplificarse, como $\cos(2\theta) = \text{sen}(\theta)$.

Al resolver por ejemplo $2\text{sen}^2(\theta) - \text{sen}(\theta) - 1 = 0$, podemos considerar los siguientes momentos:

1. Al Sustituir $x = \text{sen}(\theta)$ se obtiene la ecuación: $2x^2 - x - 1 = 0$
2. Factorizando
$$(2x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \, o \, x = -\frac{1}{2}$$
3. Regresar al cambio de variable: $x = \text{sen}(\theta)$ para obtener los siguientes casos:

Caso A: $\text{sen}(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Caso B: $\text{sen}(\theta) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \, o \, \theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Conjunto de soluciones generales:

$$\theta \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

En $\left[0, 2\pi\right) := \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

La variedad de ecuaciones trigonométricas refleja la riqueza del pensamiento trascendente. En cada caso, el estudiante aprende a transformar una expresión en otra equivalente, revelando la simetría del círculo y la regularidad del movimiento periódico. Como subraya Stewart (2016), la resolución de estas ecuaciones es una experiencia de razonamiento funcional que une la geometría, el álgebra y la intuición analítica.

Funciones inversas y restricciones de dominio

Comprender las funciones inversas constituye un paso decisivo en el recorrido formativo que lleva del álgebra a las funciones trascendentes. En este proceso, el estudiante aprende que invertir una función no solo significa "despejar una variable", sino comprender la relación recíproca entre causa y efecto en un sistema funcional. Las funciones trigonométricas y exponenciales, al extenderse más allá del comportamiento lineal o polinómico, requieren una atención especial a las restricciones de dominio, pues su carácter periódico o no inyectivo impide definir una inversa sin una selección adecuada de intervalos.

En su sentido más amplio, una función inversa se define como aquella que revierte el efecto de otra. Si una función f transforma un elemento **"x"** en un valor "y", su inversa f^{-1} transforma ese mismo **"y"** de nuevo en **"x"**: $f^{-1}(f(x)) = f(x)$

Esta idea, simple en apariencia, encierra una de las nociones más poderosas del análisis: la posibilidad de deshacer una operación dentro de un sistema de correspondencias. Según Stewart (2016), comprender la función inversa implica desarrollar una "conciencia bidireccional del cambio", es decir, la capacidad de ver una misma relación desde dos perspectivas complementarias: la de la causa y la del efecto.

Para que una función posea inversa, debe ser inyectiva y sobreyectiva, es decir, cada elemento del dominio se asocia con un único elemento del codominio, y cada valor posible está representado en la imagen. Sin embargo, muchas funciones trascendentes, como las trigonométricas o exponenciales, no cumplen estas condiciones de manera global, lo que obliga a introducir las restricciones de dominio como herramienta de coherencia matemática.

Las restricciones de dominio no deben entenderse como una limitación arbitraria, sino como un acto de precisión conceptual. En las funciones trigonométricas, por ejemplo, la periodicidad genera repeticiones infinitas de valores, lo que impide establecer una relación uno a uno entre ángulo y razón trigonométrica. Para restaurar esa unicidad, se selecciona un intervalo donde la función sea estrictamente monótona (creciente o decreciente).

De acuerdo con Thomas et al. (2014), el propósito de la restricción es “preservar la identidad funcional y garantizar la reversibilidad”. Por ello, los intervalos convencionales de definición para las inversas son:

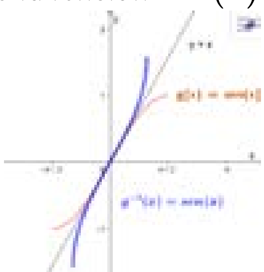
1. $\mathbf{1.\,sen^{-1}\left(x\right)} : \left[-1,1\right] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
2. $\mathbf{2.\,cos^{-1}\left(x\right)} : \left[-1,1\right] \to \left[0,\pi\right]$
3. $\mathbf{3.\,tan^{-1}\left(x\right)} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Estas restricciones garantizan que cada valor de salida de las funciones inversas sea único, evitando contradicciones. Boyce y DiPrima (2017) señalan que este principio de restricción es fundamental en el estudio de ecuaciones trascendentes, ya que permite determinar ángulos, magnitudes y tiempos de manera unívoca dentro de modelos físicos y geométricos

Las funciones trigonométricas inversas: arcoseno, arco coseno, arco tangente, arco cotangente, arco secante y arco secante, representan el paso de las razones a los ángulos. Si las funciones seno, coseno o tangente establecen relaciones entre catetos y ángulos en un triángulo rectángulo, sus inversas permiten reconstruir el ángulo a partir de una razón conocida. Geométricamente, una función y su inversa (Figura 16) son reflejos especulares respecto a la línea $\mathbf{y = x}$. Este principio de simetría es particularmente visible en las funciones seno y arcoseno: si se gráfica $\mathbf{y = sen(x)}$ y luego se refleja la curva sobre dicha diagonal, se obtiene la gráfica de $\mathbf{y = sen^{-1}\left(x\right)}$.

Esta reflexión representa un cambio de perspectiva entre variable independiente y dependiente. Lo que antes era una magnitud vertical (valor del seno) se convierte ahora en un desplazamiento horizontal (ángulo), y viceversa.

Figura 17.
Representación gráfica de la función $sen(x)$ y su inversa



Nota: Elaboración propia.

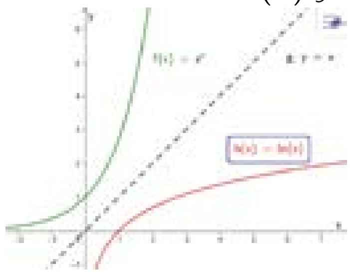
Stewart (2016) destaca que esta visualización contribuye a comprender el carácter relacional de la función: "invertir una función es observar el mismo fenómeno desde su reverso geométrico".

Apoyo didáctico: En este sentido, enseñar las funciones inversas no se reduce a operar algebraicamente, sino que implica guiar al estudiante hacia una comprensión profunda del comportamiento funcional desde una perspectiva espacial y conceptual. Comprender la inversa de una función supone reconocer cómo cada punto del plano se refleja en torno a la bisectriz $\mathrm{y} = \mathrm{x}$, transformando entradas en salidas y viceversa. Este proceso no solo favorece la visualización de la simetría y la correspondencia entre direcciones y magnitudes, sino que también estimula el razonamiento geométrico, la interpretación gráfica y la conexión entre distintas representaciones. El docente puede aprovechar herramientas digitales como GeoGebra para que el estudiante experimente con la gráfica original y su inversa, observe los cambios en tiempo real y descubra por sí mismo la relación entre ambas.

El concepto de inversa no se limita a las funciones trigonométricas. En el campo de las funciones exponenciales y logarítmicas, la relación inversa adquiere un significado complementario. La función exponencial es estrictamente creciente en todo R, por lo que su inversa se define sin necesidad de restricciones adicionales: $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}) = \ln(\mathrm{x}), \mathrm{x} > 0$.

Aquí, el logaritmo no solo revierte la acción de la exponencial (Figura 17), sino que también transforma una multiplicación en una suma, evidenciando la naturaleza estructuralmente inversa de ambas operaciones (Thomas et al., 2014).

Figura 18.
Representación gráfica de la función $\boldsymbol{sen(x)}$ *y su inversa*



Nota: Elaboración propia.

La relación entre estas dos funciones, como explica Zill (2018), ilustra la universalidad del concepto de inversión: toda operación matemática implica un proceso recíproco que equilibra el sistema funcional.

El estudio de las funciones inversas y las restricciones de dominio constituye una experiencia de pensamiento matemático integral. Enseña a reconocer los límites del sistema para conservar su coherencia, a establecer correspondencias únicas dentro de la multiplicidad y a pensar la función como un proceso reversible, simétrico y consciente de sí mismo. En el recorrido que va del álgebra al análisis, este aprendizaje representa una madurez intelectual: comprender no solo cómo una función actúa, sino también cómo puede ser deshecha para revelar la estructura que la sustenta.

Funciones trascendentes: aplicaciones, enseñanza y conexiones interdisciplinarias

Las *funciones trascendentes* constituyen el soporte matemático que permite describir los movimientos y transformaciones del mundo físico. En ellas se encuentra la síntesis de un pensamiento que va más allá del cálculo numérico: una forma de comprender los ritmos, las oscilaciones y los equilibrios que estructuran la realidad. Como sostiene Stewart (2016), "las funciones trascendentes no son un artificio del análisis, sino una traducción matemática de los procesos naturales".

Aplicaciones en movimientos ondulatorios, geometría y física

En el campo de la física y la geometría, estas funciones expresan leyes de regularidad y continuidad: el movimiento de los astros, la vibración de una cuerda, la propagación de la luz, la expansión térmica o el decaimiento radiactivo. Su estudio revela la conexión entre el lenguaje simbólico de la matemática y los principios universales de la naturaleza.

Funciones trigonométricas y el lenguaje de las ondas

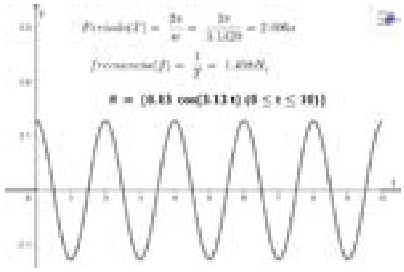
Las funciones seno y coseno representan los cimientos del análisis de los movimientos ondulatorios. La razón de su presencia en múltiples fenómenos reside en su periodicidad, que refleja la repetición de los estados en el tiempo. En una onda armónica simple, la ecuación $\mathrm{y(t) = A\,sen(\omega t + \varphi)}$ describe la posición "y de una partícula en función del tiempo, donde A es la amplitud, ω la frecuencia angular y φ la fase inicial. Esta forma funcional permite modelar fenómenos tan diversos como la vibración de una cuerda de guitarra, el desplazamiento del pistón de un motor, el comportamiento de las mareas o la variación de la corriente alterna.

Thomas et al. (2014) explican que el vínculo entre la geometría circular y el movimiento oscilatorio constituye una de las primeras unificaciones conceptuales del pensamiento científico moderno: el círculo proyectado sobre un eje se convierte en una onda senoidal, y con él, la geometría se hace dinámica.Un ejemplo significativo es el movimiento de un péndulo ideal (Figura 18), cuya trayectoria angular, para pequeñas oscilaciones, puede aproximarse por una función del tipo:

$$\theta\left(t\right) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y L la longitud del péndulo.

Figura 19.
Representación gráfica del movimiento de un péndulo



Nota: Elaboración propia.

El movimiento armónico que describe el péndulo es, en esencia, una proyección temporal de la circularidad geométrica. Para un péndulo ideal de longitud $\mathbf{L = 1{,}00m}$que se separa un ángulo inicial pequeño de $\theta = 10^{\circ}$ y se suelta sin velocidad inicial. Usa $g = 9,81\frac{m}{s^2}$ para determinar la ecuación del movimiento, periodo y frecuencia.

Ondas complejas y superposición armónica

Cuando varias ondas interactúan, su combinación se expresa mediante la superposición de funciones trigonométricas. En acústica y electromagnetismo, esta propiedad explica la interferencia de ondas, los patrones de resonancia y la formación de armónicos. La ecuación general de una onda compuesta es:

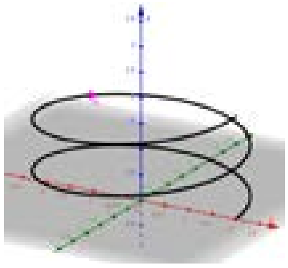
$$y\left(x, t\right) = \sum_{n=1}^{N} A_n \operatorname{sen}\left(k_n x - \omega_n t + \varphi_n\right)$$

una expresión que representa la superposición de múltiples frecuencias y fases. Zill (2018) señala que este principio es la base matemática de la teoría de Fourier, mediante la cual cualquier señal periódica puede descomponerse en una suma infinita de senos y cosenos. Esta idea revolucionó la física y la ingeniería, al permitir el análisis de vibraciones, señales eléctricas y ondas sonoras.

Geometría dinámica y parametrización de trayectorias

En geometría, las funciones trascendentes permiten describir curvas y trayectorias mediante ecuaciones paramétricas. Una circunferencia de radio r se expresa como: $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Esta relación entre periodicidad y desplazamiento lineal describe movimientos helicoidales presentes en estructuras naturales como el ADN o los remolinos de agua y en sistemas mecánicos, como los resortes o tornillos. Imaginemos una partícula que se desplaza siguiendo la forma de un resorte con radio r = 2 cm, avanzando 1 cm por cada vuelta completa (Figura 19). El movimiento se describe con las ecuaciones paramétricas: $x = 2\cos\theta, y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta, z = \frac{1}{2\pi}\theta$. donde: "x" y "y" determinan la posición circular de la partícula en el plano, z representa el desplazamiento vertical, θ es el ángulo en radianes que mide el avance en torno al eje.

Figura 20.
Representación gráfica del movimiento de un péndulo



Nota: Elaboración propia.

Si la partícula da una vuelta completa, $\theta = 2\pi$, la partícula se encuentra un centímetro más arriba que su punto inicial, completando una hélice.Según Boyce y DiPrima (2017), la geometría paramétrica basada en funciones trascendentes no solo ofrece una descripción espacial, sino que también expresa la temporalidad del movimiento: cada punto no es estático, sino un instante dentro de una trayectoria. De este modo, la geometría se integra con la física en un lenguaje común del cambio.

La función exponencial y los procesos de variación continua

La función exponencial $y = e^{kt}$ describe todos aquellos fenómenos donde la tasa de cambio es proporcional al valor presente. Aparece en la desintegración radiactiva, en el crecimiento poblacional, en la difusión del calor y en la carga y descarga de condensadores eléctricos. Por ejemplo, el enfriamiento de un cuerpo se modela con la ley de Newton:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

donde T_a es la temperatura ambiente y T_0 la inicial. Este tipo de modelos muestra cómo la función exponencial actúa como un puente entre la matemática y la naturaleza, describiendo la forma en que los sistemas evolucionan hacia el equilibrio. Imagina que sirves una taza de café recién hecho. La temperatura al momento de servirlo es de 85 grados Celsius, y lo dejas reposar sobre una mesa en una habitación que está a 25 grados Celsius. Pasados 10 minutos, decides medir la temperatura del café y descubres que ha bajado a 60 grados. Surge entonces una pregunta bastante común:

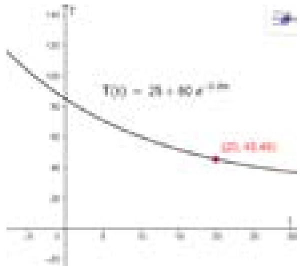
¿qué temperatura tendrá el café después de 20 minutos?

A partir de la relación anterior se obtiene una función exponencial del tipo:

$$T(t) = 25 + 60e^{-0.0538t} \text{ (Figura 21)}$$

De aquí se puede comprobar que después de 20 minutos, la temperatura del café habrá descendido hasta unos 45 grados Celsius, acercándose cada vez más a la temperatura del ambiente.

Figura 21.
Representación gráfica del movimiento de un péndulo



Nota: Elaboración propia.

Thomas et al. (2014) afirman que la relevancia de las funciones exponenciales radica en su capacidad para expresar tanto el crecimiento ilimitado como la disipación progresiva, dos tendencias opuestas pero complementarias que gobiernan los procesos físicos y biológicos.

Funciones hiperbólicas.

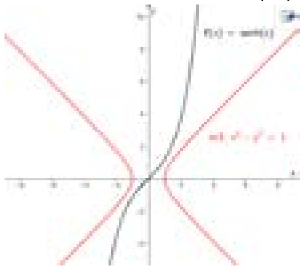
Las funciones hiperbólicas constituyen una extensión natural del estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas, ya que surgen de combinaciones particulares de estas y describen relaciones geométricas en la hipérbola del mismo modo en que las funciones trigonométricas lo hacen en la circunferencia. Su comprensión no solo tiene un interés puramente matemático, sino también un profundo valor en el análisis de fenómenos físicos, en la teoría de relatividad, en la ingeniería eléctrica y en el modelado de sistemas dinámicos continuos.

En esencia, las funciones hiperbólicas se definen a partir de la función exponencial. Así, la función seno hiperbólico y la función coseno hiperbólico se expresan como:

$$\mathrm{senh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Estas definiciones guardan una analogía profunda con las funciones trigonométricas circulares, aunque presentan propiedades geométricas diferentes: mientras el seno y el coseno se relacionan con el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, sus equivalentes hiperbólicos se asocian con la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ (figura 22).

Figura 22.
Representación gráfica de la función $senh(x)$



Nota: Elaboración propia.

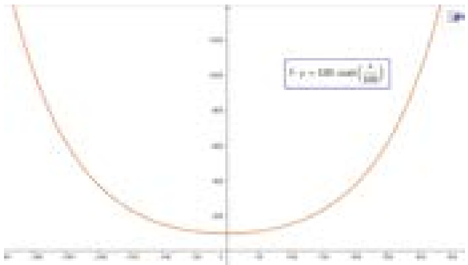
Esta relación, resaltada por Stewart (2016), permite visualizar el comportamiento de las funciones hiperbólicas como un reflejo geométrico en el plano de los números reales, donde la simetría y la proporción adquieren un nuevo significado.

Una característica notable de las funciones hiperbólicas es que satisfacen la identidad:$\cosh^2 x - \mathrm{senh}^2 x = 1$, que recuerda a la identidad pitagórica de las funciones trigonométricas, aunque con signo opuesto. Este detalle, aparentemente simple, refleja una diferencia estructural profunda: mientras las funciones trigonométricas oscilan entre valores máximos y mínimos, las hiperbólicas crecen indefinidamente, mostrando un comportamiento no oscilatorio que las hace ideales para describir procesos de crecimiento o decaimiento que no se repiten de manera periódica.

Históricamente, las funciones hiperbólicas ocuparon un lugar destacado en la búsqueda de una matemática capaz de representar con fidelidad las formas que la naturaleza adopta. Leibniz, Huygens y los hermanos Bernoulli las utilizaron para describir la curva catenaria, es decir, la forma que adopta un cable suspendido entre dos puntos fijos bajo su propio peso. Esa curva se expresa mediante la función: $y = a\cosh\frac{x}{a}$ donde “a” depende del peso y la tensión del material. Boyer (2011) destaca que este descubrimiento cambió la forma de concebir la matemática aplicada: el comportamiento de un objeto físico podía explicarse a partir de una relación puramente algebraica. Esta idea marcó un paso decisivo en la unión entre la abstracción matemática y la observación empírica.

Imaginemos un puente de 400 metros de largo, cuyos cables cuelgan entre dos torres, alcanzando una profundidad máxima de 40 metros en el punto central (Figura 22). Si quisiéramos describir matemáticamente la forma de ese cable, podríamos usar la función: $\mathrm{y} = 100 \cosh \frac{\mathrm{x}}{100}$.

Figura 23.
Representación gráfica de la función $senh(x)$



Nota: Elaboración propia.

Esta fórmula no es un simple artificio algebraico: representa una ley física que asegura el equilibrio de las fuerzas. Cada punto del cable está en perfecta compensación entre el peso que tira hacia abajo y la tensión que lo sostiene. De ahí que la forma catenaria sea considerada la curva del equilibrio natural.

Este principio se aplica en puentes como el Golden Gate de San Francisco o el Puente de la Bahía, donde los ingenieros diseñan la estructura teniendo en cuenta la tensión, el peso y la distancia entre las torres. Boyer (2011) explica que esta curva fue descubierta por Huygens, Leibniz y los hermanos Bernoulli, quienes demostraron que ninguna otra forma podía soportar mejor su propio peso. Su hallazgo transformó la ingeniería moderna y demostró que la matemática no solo describe el mundo, sino que también puede anticipar sus leyes más estables.

Más allá de su origen geométrico, las funciones hiperbólicas también poseen una dimensión simbólica y conceptual. Feynman (2011) señala que estas funciones aparecen en la descripción del espacio-tiempo dentro de la teoría de la relatividad especial, donde reemplazan a las funciones trigonométricas para expresar transformaciones que no implican rotación, sino expansión o contracción. Esta presencia en la física moderna demuestra que las hipérbolas, más que simples curvas, representan una manera de comprender el movimiento y la estructura del universo.

Apoyo didáctico: Desde la enseñanza y la formación matemática, el estudio de las funciones hiperbólicas permite desarrollar una visión más integrada del conocimiento. Larson y Edwards (2019) subrayan que introducir estas funciones en el aula no debe limitarse a su manipulación algebraica, sino que debe invitar a reflexionar sobre sus significados geométricos y sus aplicaciones. Al explorarlas, el estudiante descubre que la matemática no se reduce a fórmulas, sino que expresa las leyes de equilibrio y simetría que gobiernan la realidad.

En definitiva, las funciones hiperbólicas son una puerta hacia la comprensión de los procesos que no se repiten, pero que conservan un orden profundo. Su estudio, lejos de ser un ejercicio meramente formal, revela la capacidad del pensamiento matemático para unir lo abstracto con lo tangible, lo estático con lo dinámico. Comprenderlas significa reconocer que el crecimiento, la expansión y el equilibrio también tienen una geometría propia, escrita con el lenguaje de las hipérbolas.

Estrategias didácticas para su enseñanza y visualización

Enseñar las funciones trascendentes es, en esencia, enseñar a mirar la realidad desde una nueva perspectiva. No basta con transmitir sus fórmulas ni con demostrar sus propiedades; lo verdaderamente valioso es lograr que el estudiante descubra que detrás de cada símbolo hay una forma de interpretar el mundo. Cada función describe una manera distinta en la que los fenómenos naturales, físicos o sociales cambian, crecen o se estabilizan con el tiempo. Por eso, las estrategias didácticas deben permitir que el alumno vea, sienta y comprenda esa relación viva entre las matemáticas y lo que ocurre a su alrededor.

Una estrategia inicial consiste en comenzar desde la experiencia, desde lo observable y significativo. Antes de introducir una ecuación, es posible partir de un experimento sencillo: medir cómo se enfría un líquido, cómo se acumulan los intereses en una cuenta de ahorro o cómo aumenta el número de bacterias en un cultivo. Estas situaciones acercan al estudiante a los patrones de cambio real y lo invitan a reconocer que esos comportamientos pueden representarse con una función trascendente. Como señalan Godino y Batanero (1998), el conocimiento matemático adquiere sentido cuando el estudiante logra conectar el símbolo con la situación y con el significado que ese símbolo encierra. No se trata de memorizar expresiones, sino de descubrir lo que representan.

En un segundo momento, resulta fundamental visualizar el comportamiento de las funciones. Las herramientas tecnológicas, como GeoGebra, Desmos o los simuladores de PhET, ofrecen un espacio donde las ecuaciones se convierten en curvas dinámicas. El estudiante puede modificar valores, desplazar parámetros, observar transformaciones y descubrir regularidades sin perder la conexión con la intuición visual. Por ejemplo, al manipular el valor de "k" en la función $y = e^{kx}$, puede ver cómo la curva pasa de un crecimiento acelerado a un decrecimiento suave, comprendiendo de forma natural el papel del parámetro. Duval (1999) advierte que la visualización no debe verse como un complemento estético del cálculo, sino como un modo de pensamiento que permite acceder al significado. Ver cómo una función "se mueve" es, en realidad, comprender cómo se comporta el fenómeno que representa.

Otra estrategia poderosa es el uso de preguntas generadoras. Estas no buscan respuestas inmediatas, sino despertar la curiosidad y provocar reflexión. Por ejemplo: *¿Por qué la curva de un cable suspendido tiene una forma distinta a la de una parábola?, ¿qué sucede con una población si su tasa de crecimiento se mantiene constante?, ¿por qué el sonido o la luz disminuyen su intensidad de manera exponencial?* Este tipo de preguntas conduce al descubrimiento y al asombro, dos emociones intelectuales que facilitan el aprendizaje. Freire (1997) recordaba que enseñar es un acto profundamente dialógico: el conocimiento no se impone, se construye en interacción con la realidad y con los otros. En el aula de matemáticas, esa interacción se traduce en experimentación, debate y construcción compartida de significados.

Desde el punto de vista metodológico, es útil combinar la exploración guiada con la resolución de problemas reales. En lugar de enseñar la función logarítmica como la inversa de la exponencial desde el primer momento, puede invitarse a los estudiantes a explorar situaciones donde esta aparece de manera natural: el nivel de intensidad sonora, la escala Richter de los sismos o la medición del pH en química. En cada caso, los datos empíricos conducen a la necesidad de una función que crezca lentamente y describa relaciones no lineales. Así, la abstracción no se presenta como un salto forzado, sino como una consecuencia natural de la experiencia.

En esta línea, Kaput (1992) subraya el valor de las representaciones digitales múltiples. Una función no se entiende por su ecuación aislada, sino por la relación entre sus distintos modos de representación: el gráfico, la tabla de valores, la expresión simbólica y la descripción verbal. Alternar entre estos registros como propone Duval (2006) permite que el estudiante construya un conocimiento más flexible, capaz de adaptarse a distintas situaciones. El desafío del docente está en promover esa movilidad entre registros, ayudando a los estudiantes a descubrir que el pensamiento matemático no es estático, sino transformador.

Otra estrategia clave consiste en fomentar el uso reflexivo del error. Cuando los estudiantes grafican una función de manera incorrecta o confunden los efectos de un parámetro, el error se convierte en una oportunidad para pensar. Analizar por qué la curva no se comportó como se esperaba es una forma de construir comprensión. Desde una visión freireana, el error no es un fracaso, sino un punto de partida para el diálogo entre lo que el estudiante piensa y lo que la matemática explica.

Por último, la enseñanza de las funciones trascendentes debe situarse en un marco más amplio: el de la educación para el pensamiento relacional y crítico. Al comprender cómo una función describe un proceso natural, el estudiante no solo aprende matemáticas, sino también una forma de leer el mundo. Observa regularidades, identifica modelos y comprende que el cambio puede expresarse mediante leyes que son, a la vez, precisas y poéticas. La matemática, en este sentido, no es una colección de fórmulas abstractas, sino un lenguaje que revela la estructura profunda de la realidad.

En síntesis, enseñar funciones trascendentes implica hacerlas visibles: no como ecuaciones muertas en un libro, sino como representaciones vivas de los procesos que nos rodean. La visualización, la experimentación, el diálogo y la tecnología son caminos que devuelven humanidad a la enseñanza matemática, haciendo que el aprendizaje sea una experiencia de descubrimiento y no de repetición. Solo así el estudiante podrá reconocer que, detrás de cada gráfica o parámetro, se esconde una historia sobre cómo la naturaleza cambia, evoluciona y busca equilibrio.

Conclusiones

El estudio de las funciones trascendentes permite comprender la matemática como una forma de pensamiento que trasciende los números y se convierte en un lenguaje para interpretar el mundo. A través de las funciones exponenciales, logarítmicas e hiperbólicas, se revela la capacidad humana de abstraer los procesos del entorno y representarlos mediante modelos precisos y universales. Estas funciones no solo describen fenómenos de crecimiento, equilibrio o expansión, sino que también reflejan la búsqueda constante de patrones y estructuras en la naturaleza. Enseñar y aprender funciones trascendentes implica, por tanto, desarrollar una mirada que reconoce la conexión entre el símbolo y la experiencia, entre el razonamiento lógico y la intuición. Comprender su comportamiento es comprender, en última instancia, la manera en que el cambio se organiza y se expresa en la realidad.

Desde una perspectiva formativa, la enseñanza de las funciones trascendentes invita a replantear la relación entre teoría y práctica. La visualización, la experimentación y el uso de recursos tecnológicos favorecen la construcción de significados más profundos, donde la abstracción se acompaña de comprensión y sentido. El aula se transforma en un espacio de descubrimiento, donde el estudiante no solo aprende a operar con expresiones matemáticas, sino a interpretarlas y aplicarlas a situaciones reales. De esta forma, el tránsito desde el álgebra hacia las funciones trascendentes se convierte en un proceso que fortalece la autonomía intelectual, la capacidad crítica y el pensamiento analítico, cualidades esenciales para entender la complejidad del mundo contemporáneo.

Referencias

Artigue, M. (2018). Digital tools and mathematics teaching and learning: Conceptual frameworks and developments. Springer. ISBN 978-3-319-74371-9.

Ausubel, D. P. (1983). Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo. Trillas.

Biggs, J. (2005). Teaching for quality learning at university. McGraw-Hill Education.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5–31. https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). Elementary differential equations and boundary value problems (10th ed.). Wiley.

Boyer, C. B. (2011). A history of mathematics (3rd ed.). Wiley.

Bruner, J. S. (1997). La educación, puerta de la cultura. Visor.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The “what” and “why” of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. Psychological Inquiry, 11(4), 227–268. https://doi.org/10.1207/S15327965PLI1104_01

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning, 3(1), 3–26.

Duval, R. (2006). Un análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Ebbinghaus, H. (1913). Memory: A contribution to experimental psychology. Teachers College, Columbia University. (Trabajo original publicado en 1885).

Eves, H. (2010). Introducción a la historia de las matemáticas (6.ª ed.). Thomson Learning.
Feynman, R. (2011). Física: Principios con aplicaciones. Addison-Wesley.
Freire, P. (1997). Pedagogía de la autonomía: Saberes necesarios para la práctica educativa. Siglo XXI.
Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Didáctica de las matemáticas para maestros. Proyecto Sur.
Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27(3), 126–131.
IUPAC. (2014). Quantities, units and symbols in physical chemistry (3rd ed.). Royal Society of Chemistry.
Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 515–556). Macmillan.
Krashen, S. D. (1982). Principles and practice in second language acquisition. Pergamon Press.
Larson, R. (2021). Precalculus (11th ed.). Cengage Learning.
Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). Calculus of a single variable (12th ed.). Cengage Learning.
Malthus, T. R. (2008). An essay on the principle of population. Oxford University Press. (Trabajo original publicado en 1798).
Murray, J. D. (2002). Mathematical biology. I: An introduction (3rd ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/b98868
Rogers, E. M. (2003). Diffusion of innovations (5th ed.). Free Press.
Schön, D. A. (1983). The reflective practitioner: How professionals think in action. Basic Books.
Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2014). Physics for scientists and engineers with modern physics (9th ed.). Cengage Learning.
Stewart, J. (2016). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (8.ª ed.). Cengage Learning.
Sullivan, M. (2016). Algebra and trigonometry (10th ed.). Pearson.
Tall, D. (2013). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202
Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2014). Cálculo de una variable (13.ª ed.). Pearson Educación.
Thomas, G. B., & Weir, M. D. (2019). Thomas' calculus (14th ed.). Pearson. (Edición 2019; distintas variantes en "SI Units"/US).
Tukey, J. W. (1977). Exploratory data analysis. Addison-Wesley.
Vygotsky, L. S. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Crítica.
Zill, D. G. (2018). Advanced engineering mathematics (7th ed.). Jones & Bartlett Learning.